

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

К.А. РЫБНИКОВ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ



К. А. РЫБНИКОВ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ II

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образова-
ния РСФСР в качестве учебного
пособия для университетов.*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1963

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена истории математики в XVIII и XIX вв. В большинстве глав содержатся, кроме того, материалы о развитии математики в начале XX в. Автор стремился осветить основные, определяющие моменты и стороны развития математики. Для их иллюстрации он обычно выбирал небольшое количество наиболее важных фактов.

Книга предназначена для того, чтобы служить учебником или учебным пособием по истории математики для студентов математических специальностей университетов. Автор надеется, что этот первый опыт систематического курса может оказаться полезным и для более широких кругов математиков — преподавателей, исследователей, научно-практических работников, стремящихся осмыслить с позиций марксизма-ленинизма исторический опыт своей науки, предпосылки и пути формирования современной математики.

Характер рассматриваемых в книге вопросов таков, что от читателя потребуются некоторая математическая подготовка. В необходимых случаях даны разъяснения. Однако приводить подробные доказательства, систематически излагать содержание тех или иных дисциплин или иным способом заменять соответствующие учебники автор не имел возможности. Он также считал невозможным стремиться в настоящей книге к полноте изложения фактов истории математики. Поэтому в тексте книги широко применяются ссылки на сочинения, где рассматриваемый вопрос изложен более полно.

Первый том настоящей книги посвящен истории математики до XVIII в. Он вышел в издательстве МГУ в конце 1960 г. На него поступили (как от советских ученых, так и от ученых ряда стран) многочисленные отклики. Они были благоприятными и облегчили автору решение трудной задачи

написания настоящей книги. Автор выражает благодарность всем лицам, приславшим эти замечания. В ходе работы над настоящим томом он сохранил связь и преемственность содержания обеих книг, лишь несколько изменив форму изложения.

В список литературы, учитывая учебное назначение книги, включено сравнительно небольшое количество книг и статей на русском языке. При их выборе принималось во внимание, могут ли они дать человеку, впервые изучающему историю математики, достаточно широкую и компактную информацию, существенно дополняющую материал соответствующей главы книги и не уводящую слишком далеко в область специальных историко-математических проблем.

Автору оказали помощь замечаниями и советами: академик П. С. Александров, академики АН УССР Б. В. Гнеденко и И. З. Штокало, профессора Н. И. Симонов и Б. В. Шабат, доктор физико-математических наук И. Г. Башмакова, кандидат физико-математических наук И. Б. Погребысский, научные сотрудники А. В. Дорофеева и Л. А. Сорокина. Всем им автор выражает искреннюю благодарность. Он также отмечает значение атмосферы творческого исследования, создаваемой коллективным трудом многих лиц, работающих в Московском государственном университете над проблемами истории математики и истории науки вообще. Прочные научные связи, установившиеся между советскими и зарубежными учеными, работающими в области истории математики, также способствовали успеху.

Издательство МГУ (в особенности тт. Л. Г. Орлов, С. Ф. Кондрашкова, О. Т. Помаленькая) проявило большую заботу об издании этой книги.

Автор примет с благодарностью замечания и предложения читателей.

ЧАСТЬ I

ПЕРИОД СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИКИ
ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН.
РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XVIII В.

ГЛАВА I

УСЛОВИЯ И ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В XVIII в.

В истории математики XVIII век является периодом создания математики переменных величин. Начало этому периоду, как было показано в первом томе настоящей работы, было положено во второй половине XVII в. Развитие экономической и общественной жизни людей, связанное со становлением новой, капиталистической формации, стало приводить к этому времени к перестройке социальных, научных, культурных и других идеологических концепций. В области математики это выразилось в основном в том, что под давлением проблем математического естествознания и техники необычайно развились исследования, связанные с изучением движений, изменений, их скоростей и других аспектов переменных величин. К концу века в математику прочно вошли новые исчисления переменных, в особенности анализ бесконечно малых. Эти исчисления начали быстро занимать главное, основное положение в математике.

Процессы развития математики в ходе истории делаются все более и более сложными. К XVIII в. эта сложность и многосторонность достигли высокой степени. Поэтому в настоящей книге оказалось необходимым предпослать систематическому изложению истории математики в XVIII в. некоторые вводные замечания о том, в каких условиях развивалась математика в этом столетии и каковы были ее главнейшие особенности.

Исходные пункты математики XVIII в. В начале века математики в своих исследованиях могли исходить уже из весьма значительного конкретного материала. Его основу и

наиболее актуальную часть составлял анализ бесконечно малых, возникший в Англии в виде ньютоновского исчисления флюксий, а на континенте Европы в виде лейбницевского исчисления дифференциалов. Их общность, а во многих частях и совпадение, были уже осознаны. Совокупность методов решения прямых задач этих исчислений, составляющих ныне основную часть дифференциального исчисления, была в основном создана. Дифференциальное исчисление заняло место одной из частей классической основы математического анализа. Появились первые учебники, систематически излагающие его методы и результаты (1696, Лопиталь. Анализ бесконечно малых).

В области обратных задач, т. е. интегрального исчисления, время подведения итогов еще не наступило, так как было сделано еще не так много. В области неопределенного интегрирования продолжалась разработка приемов интегрирования в элементарных функциях. Так, например, идея интегрирования дробно-рациональных функций при помощи разложения их на простейшие дроби была высказана Лейбницем лишь в начале XVIII в. (1702—1703). О перестройке интегрального исчисления на базе понятия определенного интеграла еще не могло быть и речи.

По мере накопления приемов интегрирования усиливалась потребность в исследовании простейших трансцендентных функций и в обогащении их класса. Геометрические методы исследования, основанные на изучении площадей и абсцисс, зависящих друг от друга определенным образом, оказывались недостаточными, негибкими. Их дополняли методы представления функций степенными рядами и усовершенствования символической формы их выражения.

Наряду с формированием основы математического анализа — дифференциального и интегрального исчисления — к началу века появились результаты и в его высших областях: теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении. Интегрирование первых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, к которым приводили задачи математического естествознания, пробовали осуществлять с помощью лишь алгебраических и элементарных трансцендентных функций. Отдельные результаты были достигнуты. Однако вскоре математики убедились, что на таком пути решить сколько-нибудь широкий круг уравнений не удастся. Задача была трансформирована и решение дифференциальных уравнений стали этыскивать в квадратурах.

Арсенал приемов интегрирования дифференциальных

уравнений был еще невелик. В него входили: разделение переменных, отдельные случаи нахождения интегрирующего множителя, решение однородного уравнения первого порядка подстановкой $y = xt$. И. Бернулли в 1697 г. проинтегрировал уравнение, носящее теперь его имя,

$$dy + P(x)y dx = Q(x)y^n dx,$$

преобразовав его в линейное дифференциальное уравнение первого порядка с помощью подстановки $y = v^{\frac{1}{1-n}}$. Этот способ был, впрочем, известен также Лейбницу и Я. Бернулли. На рубеже века И. Бернулли сумел дать решение линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка

$$Qx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + Bx^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ax \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

понижая его порядок с помощью интегрирующего множителя вида x^p . Сколько-нибудь систематической разработки теории дифференциальных уравнений еще не было, но задача эта стояла как первоочередная.

В области вариационного исчисления математики XVII в. сумели накопить некоторый запас задач особого рода — вариационных, — осознать их своеобразие, найти решения ряда элементарных задач. Задача создания общего метода выдвинулась на первый план и в этой части математического анализа.

В ходе энергичной работы в различных областях математического естествознания быстро росло число задач, решаемых с помощью методов еще нового тогда анализа бесконечно малых. Крепла уверенность, что дифференциальные уравнения отражают если не все, то во всяком случае главные закономерности природы. Решение дифференциальных уравнений представлялось многим ученым универсальным средством познания. Однако этот могучий арсенал приемов нес в своих основах неразрешенное противоречие между растущими практическими успехами и логической несообразностью, необоснованностью приемов оперирования с бесконечно малыми величинами и особенно отбрасывания их. Этому противоречию суждено было в скором будущем проявиться, и притом в резкой форме.

Алгебра, на которую опирался новый анализ, к концу XVII в. приобрела достаточно усовершенствованный буквенно-символический аппарат. Ее практические возможности, кроме решения в радикалах уравнений первых четырех сте-

пений и некоторых приближенных методов, существенно расширились за счет установления многих фактов общей теории алгебраических уравнений и элементов теории определителей. Центральной проблемой алгебры сделалась проблема отыскания общего метода решения алгебраических уравнений любой степени. Понятие решения таких уравнений в значительной степени еще сливалось с задачей представления корней уравнений посредством той или иной комбинации радикалов.

Арифметические вычислительные методы к этому времени обогатились за счет использования логарифмов и соответствующих многочисленных таблиц. Начали появляться вспомогательные вычислительные устройства, среди которых наиболее совершенными были арифмометры Шиккарда, Паскаля, Лейбница и др. и логарифмические шкалы. Пестрота и разнообразие, неравномерность развития, всегда присущие науке в любой момент времени, в арифметике проявились в отставании понятия отрицательного числа и даже в неравноправном положении десятичных дробей сравнительно с обыкновенными.

В составе геометрии помимо элементарных частей и тригонометрии ученые XVIII в. могли использовать аналитическую геометрию, не очень еще совершенную, созданную в 30-е годы XVII в. Декартом и Ферма. К ней примыкала совокупность геометрических приложений дифференциального исчисления, впоследствии выделившаяся в особый вид геометрии — дифференциальную геометрию.

К началу XVIII в. накопился значительный запас сравнительно еще элементарных представлений теоретико-вероятностного характера. Начальные соображения ряда ученых, например Кардано и Тарталья о числе способов получения желаемого количества очков при игре в кости, Луки Пачиоли, относительно задачи разделения ставки, позволяли предвидеть возможность математического изучения случайных явлений. В последующем Паскаль, Ферма, Я. Бернулли и др. нащупали в хаосе случайных событий определенные количественные закономерности, из которых самой существенно важной была простейшая форма закона больших чисел. Вынужденная узость конкретного материала (азартные игры, отдельные таблицы с результатами наблюдений) и элементарность методов (арифметико-комбинаторных) воспринимались как временное и преодолимое препятствие.

Объем математических сведений, которыми должен был располагать квалифицированный математик конца XVII —

начала XVIII в., был, таким образом, довольно велик. Видимо, в силу именно этого обстоятельства, начиная со второй половины XVII в. начали появляться многотомные сочинения, имеющие целью охватить всю математику, изложить ее в целом, систематически. Например, в 1661 г. в Вюрцбурге вышел в свет однотомный «Курс математики или полная энциклопедия всех математических дисциплин» («Cursus mathematicus sive absoluta omnium mathematicarum disciplinarum Encyclopaedia») К. Шотта. Через 13 лет, в 1674 г., «Курс или мир математики» («Cursus seu mundus mathematicus») лионца Дешаля потребовал уже трех томов. Еще через 20 лет, в 1693 г., «Курс математики» («Cours des mathématiques», Paris) Озанама появился в пяти томах.

Тенденция к созданию единой системы математики в последующие века не ослабевала, являясь неперменным спутником дальнейшего роста математики. В наши дни выразителем подобных устремлений является, например, многотомное (еще не завершенное) сочинение «Элементы математики», коллективный автор которого (группа математиков, преимущественно французских) выступает под общим псевдонимом Никола Бурбаки.

Об условиях развития математики в XVIII в. В настоящей книге нет возможности полно охарактеризовать условия, в которых развивалась математика в то время, и формы организации деятельности ученых-математиков. Экономическая и политическая история XVIII в. слишком для этого сложна. В экономическом плане она характеризуется решающей победой капиталистического способа производства. Вторая половина XVIII в. в странах Европы в основном уже может быть отнесена к эпохе промышленного капитализма.

Темпы развития науки в это время быстро нарастают. Промышленная революция, образование мирового рынка, связанные с этим нужды мореплавания, кораблестроения, военной техники, теплотехники, гидроэнергетики и т. п., практические нужды общества ставят перед наукой быстро усложняющиеся задачи. Помимо задач механики и астрономии перед физико-математическим комплексом наук встали проблемы создания математического аппарата исследований электромагнитных явлений и теплоты.

Решение научно-технических и даже просто научных задач становится делом государственной важности. Таблицы положений луны, солнца, звезд, проблема изобретения хронометра высокой точности, показания которого не зависели бы от качки корабля, нахождение методов отображения

сферы на плоскость как важнейшая часть картографии и др. приобретают необычайную актуальность, срочность. В то же время владение средствами нового анализа создает обстановку *возможности* решения подобных задач, их доступности усилиям ученых.

Для целей научного исследования в крупнейших городах Европы создаются специальные учреждения — академии наук, субсидируемые государством. Постепенно возрастает роль высших учебных заведений, ставшая особенно заметной к концу XVIII в., в эпоху Великой французской буржуазной революции. В обществе появляется заметная прослойка ученых-профессионалов, в том числе профессионалов-математиков, главным делом жизни которых являются научные исследования и преподавание. В связи с этим происходит заметная демократизация состава ученых. В самом деле, например, величайший математик XVIII в. Л. Эйлер был сыном сельского пастора, Ж. Л. Лагранж происходил из семьи офицера, П. С. Лаплас и М. В. Ломоносов — крестьянского происхождения, Ж. Даламбер не имел родной семьи. Число подобных примеров можно значительно увеличить.

Изменение содержания математики. В течение XVIII в. существенно изменилось содержание математики. Характеристике этих изменений мы посвятим несколько следующих глав. Поэтому здесь мы ограничимся лишь несколькими замечаниями вводного характера.

Самые большие, коренные изменения произошли в математическом анализе. Во много раз увеличилось количество входящих в него фактов. По своему содержанию анализ трансформировался. Из метода, придуманного для решения определенного класса задач, он преобразовался в анализ функций, приобрел структуру, близкую к современной. В течение XVIII в. от классического анализа постепенно отпочковался ряд дисциплин, получивших самостоятельное развитие. В первую очередь приобрела самостоятельность теория дифференциальных уравнений, наиболее интенсивно разрабатываемая в силу ее практической ценности. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений получила систематическое развитие, начиная с работ И. Бернулли и особенно Д. Риккати. В то же время ряд практических задач выдвинул проблему решения уравнений с частными производными. Первые успехи были достигнуты в решении задач о колебаниях струны, мембраны, столба воздуха в трубе и т. п. Поэтому наиболее ранние теоретические успехи относятся к методам интегрирования уравнений гиперболического типа.

На базе расширения понятия функции на область комплексного аргумента, широкого применения разложения функций в ряды начала создаваться теория функций комплексного переменного. В ней был открыт ряд фактов, в том числе формулы Муавра и Эйлера. Открытие и применение конформного отображения существенно продвинуло эту область анализа и еще больше подчеркнуло ее своеобразие.

Геометрические приложения анализа также выделились в самостоятельную дисциплину — дифференциальную геометрию. Крупнейшие ученые эпохи — Эйлер, Клеро, Монж, Менье и др. — работали в этой области, стремясь создать общую дифференциально-геометрическую теорию, способную исследовать пространственные объекты: пространственные кривые и поверхности.

Из совокупности методов решения класса вариационных задач сложилось особое исчисление — вариационное. Вначале его составляли только так называемые прямые методы, созданные Эйлером. Во второй половине века было открыто исчисление, основанное на введении нового понятия — вариации.

Кроме этих больших направлений в анализе получили серьезное продвижение: теория рядов, исчисление конечных разностей, теория специальных функций и др.

Структура математики, разумеется, не исчерпывалась в то время анализом бесконечно малых со всеми его, теперь уже многочисленными, ответвлениями. Настойчивые попытки исследования общей теории алгебраических уравнений привели к разработке теории детерминантов, теории делимости многочленов, линейной алгебры и др. В самом конце столетия, в 1799 г., появилась замечательная книга Руффини «Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени». Доказательство было не совсем строгим, но в нем были новые идеи, вводящие в современную нам алгебру. Руффини, в частности, ввел понятие группы операций и фактически связал некоторые свойства группы с проблемой разрешимости уравнений в радикалах.

Весьма существенно пополнилась совокупность геометрических дисциплин. В нее уже входила аналитическая геометрия, принявшая к середине века облик, весьма близкий к современному нам как по символике, так и по объему. Вместе с учением о перспективе сложилась к концу века начертательная геометрия, ставшая тотчас же важнейшей

частью высшего технического и математического образования. Привлекали интерес ряда ученых проективно-геометрические идеи Дезарга, что подготовило почву для Понселе, который в начале XIX в. создал стройное здание проективной геометрии. Весьма интересные исследования проводились в области тригонометрии и элементарной, или, точнее говоря, синтетической геометрии.

В настоящем перечне составных частей комплекса математических наук XVIII столетия нельзя обойти молчанием теорию чисел. Несколько обособленное положение этой дисциплины не мешало тому, что она постоянно находилась в центре внимания крупнейших ученых, прилагавших огромные усилия для решения ее трудных, но заманчиво просто сформулированных задач. Как мы покажем далее, XVIII век многое дал теории чисел: найдено общее решение неопределенных уравнений второй степени, сформулирован закон взаимности для квадратичных вычетов, доказана иррациональность π и e и т. д. Наконец, в XVIII в. было положено начало научной разработке теоретико-вероятностных проблем, еще тесно сплетенных с задачами элементарного комбинаторного анализа.

Мы специально предприняли составление этого перечня, чтобы читатель смог уже в первом приближении представить себе тот факт, что математика XVIII в. далеко развила основные идеи математики прошлого века. Период создания математики переменных величин охватывает и этот век, но весь облик математики, уровень ее развития уже таковы, что совсем не походят на математику предыдущих столетий.

В первых шести главах, посвященных истории математики в XVIII в., мы будем касаться только развития математики в странах Европы. Мы вынуждены поступать так потому, что буржуазно-капиталистическая Европа в развитии экономики и науки находилась в то время на первом месте в мире. Успехи математики в Европе несравнимо более значительны в это время, чем на любом другом континенте.

Из европейских государств наибольшую активность в математике мы наблюдаем во Франции, где творили Даламбер, Лагранж, Лаплас, Монж, Лежандр и многие другие выдающиеся математики. Мы будем также часто обращаться к работам английских математиков — Тейлора, Маклорена, Стирлинга, немецких — Ламберта, Гаусса и др. Ведущее место в математике XVIII в. занимала и Россия благодаря деятельности Л. Эйлера, Д. Бернулли и других петербургских академиков.

Об условиях развития математики в России. Начало XVIII в. было для нашей родины временем быстрого преодоления исторически обусловленной многовековой отсталости. Реформы Петра I были направлены на реорганизацию армии и флота, создание промышленности, переделку государственного аппарата, налаживание системы подготовки необходимых специалистов. Эти реформы быстро и энергично проводились в жизнь.

Так, например, в 1701 г. была открыта навигацкая школа (морское училище), в 1711—1712 гг. — артиллерийская школа. С 1714 г. во многих крупных городах России были организованы так называемые цифирные школы, имеющие целью привить учащимся элементарную математическую грамотность. В следующем, 1715 году начала работать Морская академия.

Первое научное учреждение России — Петербургская академия наук — было создано в 1725 г. Как составная часть Академии существовали гимназия и университет, готовившие кадры, в которых остро нуждалась страна. Для ведения научной работы и подготовки отечественных специалистов были приглашены из других стран молодые талантливые профессора. В Петербург приехали и математики: сыновья Я. Бернулли — Даниил и Николай (последний вскоре, в 1726 г., скончался), ученик Я. Бернулли — Я. Герман, бывший ранее профессором в Падуге, а затем во Франкфурте-на-Одере. Немного времени спустя приехал совсем юный уроженец Швейцарии Л. Эйлер, нашедший в России вторую родину.

Молодая Академия быстро завоевала международную известность. В первом же выпуске научного журнала «Комментарии Петербургской академии наук» (за 1726 г.; опубликовано в 1728 г.) содержались важные статьи об интегрировании дифференциальных уравнений. Со второго тома в «Комментариях» начал публиковать свои работы Эйлер. В третьем томе был помещен важный мемуар Д. Бернулли о колебании струны, в котором решение было дано в виде тригонометрического ряда.

В 15 томах этого научного журнала Академии наук, вышедших в период 1728—1802 гг., и в других ее изданиях этого же периода было опубликовано более 700 научных статей и книг по теоретическим и прикладным вопросам математики. Многие из этих работ оказали большое влияние на развитие науки. «Не могу Вам довольно объяснить, с какой жадностью повсюду спрашивают о петербургских мемуа-

рах», — писал Эйлеру в 1734 г. Д. Бернулли, который к тому времени уже возвратился на родину.

Однако своеволие временщиков и цариц, интриги и взаимная вражда царедворцев тяжело сказались на Академии. Внутри нее велась тяжелая борьба за воспитание национальных научных кадров, проводимая М. В. Ломоносовым (1711—1765). Без кадров захирели и были закрыты гимназия и университет при Академии. Большие трудности переживал и Московский университет, основанный в 1755 г. по инициативе Ломоносова.

Славой и гордостью нашей отечественной науки в области математики являлся в то время Л. Эйлер. Он напечатал огромное число книг и статей, воспитал большое число учеников, ставших позднее академиками. Его значение в истории математики было исключительно велико. Приведем краткие биографические сведения о нем.

Леонард Эйлер (1707—1783) — уроженец г. Базеля (Швейцария). Его отец — Пауль Эйлер — был небогатым пастором. В молодые годы он увлекался математикой, изучал ее под руководством Я. Бернулли. Своему сыну он прочил тоже духовную карьеру. Однако в Базельском университете Леонард увлекся математикой, слушал лекции И. Бернулли и регулярно занимался с ним. Он блестяще окончил университет, получил ученую степень магистра, но работы найти не мог.

Его друзья, сыновья И. Бернулли — Даниил и Николай, уехали в 1725 г. в Петербург. По их рекомендации получил приглашение работать в Петербургской академии наук и Л. Эйлер. Вакантным, правда, было место на кафедре физиологии, но это не смущало молодого ученого. Все-таки работа! В мае 1727 г. он приехал в Россию и прожил здесь 14 лет (до 1741 г.).

Физиологией заниматься не пришлось. Эйлеру предоставили возможность вести исследования в области физико-математических наук. Он с огромным рвением принялся за научную и педагогическую работу. За это время он опубликовал свыше 50 и подготовил к печати 80 научных работ по анализу, теории чисел, дифференциальным уравнениям, астрономии. В том числе появилась в 1736 г. двухтомная «Механика», включающая механику точки. Эйлер выполнял многочисленные государственные задания. В 1738 г., во время напряженной работы над составлением географических карт России, он потерял зрение на один глаз. Но научная деятельность его разрасталась и ускорялась. У него появи-



Л. Эйлер
1707—1783

лись талантливые ученики: Котельников, Румовский, Фусс, Головин, Сафронов и др. Авторитет Эйлера быстро рос, рос авторитет и Петербургской академии.

Однако в Петербурге работать было беспокойно. Тревожная политическая обстановка, о которой мы упоминали выше, пугала Эйлера. В 1741 г. он принял предложение переехать в Берлин во вновь организуемую Академию наук. В Берлине он проработал до 1766 г. в должности вице-президента и директора математического отделения. За это время он написал около 300 научных работ, книг и статей. Примерно половину их он отправлял для публикации в Петербург, где по-прежнему числился почетным академиком и откуда получал деньги. Эйлера тянуло обратно в Петербург. Он вел оживленную переписку с Россией, поддерживал Ломоносова, помещал у себя в доме и учил молодых ученых, приезжавших из Петербурга, закупал научные инструменты, давал отзывы.

Наряду с огромным количеством статей Л. Эйлер в берлинский период жизни написал ряд монографий, в которых в систематическом виде излагал современное состояние математических наук. В 1744 г. он написал трактат о вариационном исчислении, новой, открытой им области математики. В 1748 г. вышло в свет «Введение в анализ бесконечно малых», а в 1755 г. — «Дифференциальное исчисление». Так было положено начало громадной работе Эйлера по приведению в систему необычайно разросшегося математического анализа. Как продолжение написанной в Петербурге «Механики» в 1765 г. выходит «Механика», посвященная движению твердого тела.

Наконец, Эйлер преодолел сопротивление прусского короля, преодолел сопротивление Шумахера — всемогущего в то время секретаря Петербургской академии — и стоящей за ним группы и в 1766 г. со всей семьей переехал в Петербург. Здесь он был окружен почетом и мог, казалось бы, спокойно жить, умеренно работая. К тому же, преклонный возраст и почти полная потеря зрения вынуждали знаменитого математика к покою.

Но необычайная научная активность Эйлера продолжалась. Во второй петербургский период он представил в Академию еще 416 книг и статей, диктуя их своим ученикам. Академия не успевала публиковать труды Эйлера. Они печатались в изданиях Академии в течение 80 лет после его смерти (до 1862 г.). Среди работ этого периода особенно много больших монографий, в которых приводятся в систему

различные области математики и смежных дисциплин. В течение 1768—1770 гг. вышли в свет три тома «Интегрального исчисления», включающие в себя кроме методов интегрирования функций теорию дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных, а также вариационное исчисление. В те же годы появились: двухтомный трактат об алгебре, трехтомное сочинение натурфилософского характера, написанное в форме «Писем о разных физических и философических материях, писанных к некоторой немецкой принцессе». Второй петербургский период жизни Эйлера дал науке кроме указанного и другие большие сочинения: диоптрику в трех томах, новую теорию исчисления лунной орбиты (1722), теорию кораблестроения и навигации (1778) и др.

Научное наследие Эйлера огромно. Им написано свыше 850 сочинений, среди которых свыше 40 больших, нередко многотомных, монографий. На родине Эйлера, в Швейцарии, было предпринято в 1909 г. издание полного собрания его сочинений. Рассчитано, что оно должно составить 72 огромных тома большого формата. Однако в течение 50 лет вышло 42 тома, а материал, предназначенный для опубликования, убавился едва на половину. Кроме того, в Ленинграде, Берлине и в других городах хранится свыше трех тысяч писем из научной переписки Эйлера; многие письма по существу являются научными работами. Опубликована же лишь небольшая часть этой переписки.

Научные работы Эйлера охватывают практически всю современную ему математику. Во всех областях математики он сделал выдающиеся открытия, ставившие его на первое место в мире. Ему было доступно понимание математики как единого, хотя и огромного целого. В нем он привел в систему главнейшие отрасли, и прежде всего анализ со всеми его ответвлениями. Лаплас указывал, что Эйлер был общим учителем для всех математиков второй половины XVIII в.

Научная деятельность Эйлера в основном имела алгоритмическую направленность. К построению общей теории он приходил, отправляясь от конкретных, имеющих сплошь и рядом практическое значение задач. В его научном наследии исключительно велик удельный вес практики. Примерно 40% его работ посвящено прикладной математике, физике, механике, в том числе небесной механике, гидромеханике, теории упругости, баллистике, кораблестроению, теории машин, оптике и др. Черты алгоритмичности присущи и его чисто, казалось бы, теоретическим работам. Особенно это заметно в трудах по анализу бесконечно малых, который по существу стро-

ился им как математический аппарат классической механики и физики.

Нет возможности перечислить хотя бы главные открытия и научные достижения Эйлера. Их слишком много. Характеризовать их означало бы практически характеризовать всю математику XVIII в. В трудах Эйлера содержится ряд глубоких идей, получивших дальнейшее развитие лишь через несколько десятков лет. Например, он частично предварил исследования К. Ф. Гаусса по внутренней геометрии поверхностей. В 1758 г. он доказал теорему о топологической (эйлеровой) характеристике многогранников, положив начало накоплению фактов топологии. Ему принадлежит первое использование методов анализа в решении теоретико-числовых задач и создание аналитической теории чисел. Теоремы и формулы, методы и символы, носящие имя Эйлера, часто встречаются в математике и в наши дни, занимая в ней важное место.

Многие открытия Эйлера переоткрывались после его смерти другими учеными. Особенно много таких переоткрытий встречается в теории дифференциальных уравнений. Например, задачу о колебаниях круглой мембраны Эйлер свел еще в 1766 г. к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Теперь это уравнение носит имя Бесселя, немецкого математика и астронома XIX в. К слову, решение, данное Эйлером этому уравнению, представляет собой бесконечный ряд, выражающий цилиндрические функции первого рода и любого порядка (цилиндрические функции нулевого порядка появились в мемуаре Д. Бернулли о колебаниях гибкой нити, подвешенной за один конец). Примеров подобного рода переоткрытий можно привести очень много.

Научные заслуги Эйлера и его учеников выдвинули Петербургскую академию наук на одно из первых мест в мире. Россия сделала одним из центров математических исследований. Педагогическая деятельность Эйлера, его учеников, подготовка новых кадров в университетах: Петербургском академическом (существовал до 1783 г.) и особенно в Московском (организован в 1755 г.) — создали условия для широкого развертывания сети высших учебных заведений России и роста математически образованных кадров в следующем, XIX столетии.

Перейдем к характеристике развития отдельных математических наук,

ГЛАВА II

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ В XVIII в.

Еще при жизни И. Ньютона и Г. В. Лейбница сделалось очевидным, что недавно открытые исчисления флюксий и дифференциалов явились лишь преддверием новой области математики, ее элементарной частью. Содержание анализа бесконечно малых (как стали называть эту область математики) фантастически быстро пополнялось новыми фактами. Операции дифференцирования и интегрирования оказывались применимыми ко все более широкому классу функций. Соответственно расширились возможности приложения анализа бесконечно малых. В свою очередь практические потребности вынуждали распространять операции анализа на быстро возрастающий класс функций. В сущности самой главной трудностью в развитии анализа бесконечно малых оказывалась необходимость такого представления функциональных зависимостей, которое позволяло бы применять к ним операции нового исчисления. Поэтому оказывалось все более необходимым исследовать смысл понятия функции, дать классификацию всех известных функций и найти способы оперирования с ними. Задача создания теории функций сделалась первой, предварительной задачей анализа бесконечно малых. Эйлер писал, что весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций.

Монографии XVIII в., посвященные систематическому изложению анализа, ярко отразили эту особенность его развития. В них, как правило, дифференциальному и интегральному исчислению были предпосланы специальные введения или даже книги, содержащие анализ функций. Типичным и

наиболее совершенным образом, которому следовали математики XVIII в., является серия книг Л. Эйлера.

Старая идея систематического изложения всей современной математики, позволяющего осмыслить ее как единую науку, пошла в Л. Эйлеру своего последователя. Он понимал, что гигантский рост математики уже не позволит осуществить эту идею в одном сочинении. Поэтому Л. Эйлер принял написание серии монографий, освещающих современное состояние отдельных частей математики. Анализ бесконечно малых он посвятил следующие книги:

а) Введение в анализ бесконечно малых — 2 тома, изд. 1748 г. б) Дифференциальное исчисление — 2 тома, изд. 1755 г. в) Интегральное исчисление — 3 тома, изд. 1767—1770 гг. (4-й том, вышедший в 1794 г., после смерти Л. Эйлера, был составлен из ряда его работ).

Эти классические, без всякого преувеличения, сочинения отразили состояние анализа в XVIII в. и послужили образцом для последующих аналогичных трудов на несколько десятилетий, практически до начала следующего, XIX, столетия. Первый том «Введения в анализ...» Эйлера был посвящен учению о функциях, об их классификации, свойствах, способах разложения функций в бесконечные ряды и произведения, в непрерывные дроби и в суммы простых дробей.

Анализ функций. Понятие функции имеет два аспекта: функции как соответствия и как аналитического выражения. Интуитивное восприятие функциональной зависимости как проявления причинной связи явлений в различных модификациях свойственно человечеству с давних времен. Большую историю имеют также попытки выражения этих зависимостей средствами математики. Одними из первых попыток являлись: учение античных математиков о геометрических местах и составление многочисленных таблиц. В дальнейшем совокупность средств математического выражения функций обогащалась. В нее входили: символический аппарат диофантова анализа, алгебраические и тригонометрические функции, логарифмы и другие конкретные данные о тех или других функциях или классах функций.

Общая идея функции как соответствия сравнительно общей природы была с большой силой подчеркнута Декартом. Однако возможность оперирования с функциями неизбежно связывалась с их конкретными выражениями: средствами геометрии или аналитическими символическими выражениями. И. Ньютон к этому добавил механическую трактовку функции, в своей теории флюксий. Оперативная часть этой теории

основывалась, как известно, на разложениях функций в степенные ряды. В свою очередь Лейбниц выразил общую идею функциональной зависимости, введя термин «функция» и соответствующий символ для всех отрезков, связанных с кривой, и таких, что длина их зависит от положения точки на кривой (ординаты, отрезки касательных, подкасательных, нормалей, поднормалей).

Практические успехи анализа бесконечно малых побуждали ученых обращать большее внимание на такую трактовку понятия функции, которая способствовала бы оперированию с конкретными функциями. Эту тенденцию весьма отчетливо выразил в 1718 г. И. Бернулли, предложивший считать, что функция есть просто аналитическое выражение. На ту же господствующую в то время позицию встал и Эйлер, дав следующее определение функции: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел, или постоянных количеств»¹.

Чтобы придать этому определению наибольшую возможную общность, Эйлер допускал как действительные, так и мнимые значения аргумента. Функция, понимаемая просто как аналитическое выражение, образуется у Эйлера с помощью класса допустимых операций, в который входят: арифметические действия, степени, корни, решения алгебраических уравнений. К ним Л. Эйлер присоединил элементарные трансцендентные функции: e^z , $\ln z$ и тригонометрические функции. Наконец, в класс допустимых операций было включено интегрирование.

Классификация функций производится, в соответствии с определением этого понятия, в основном, по виду их символических выражений (см. рис. 1). Эйлер дополнил этот принцип классификацией функций по их свойствам. Так, он вводит однозначные и многозначные, четные и нечетные функции, показывает, каковы символические признаки наличия или отсутствия того или иного свойства, учит читателя определять, какие из свойств функции сохраняются при производстве той или иной операции, а какие — не сохраняются. Классификация функций Эйлера означала новый этап восприятия этого понятия, отличающийся сравнительно большой общностью. Однако отодвигание на второй план общего понятия функции как соответствия, опора только на

¹ Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т. I Физматгиз, М., 1961, стр. 5.

аналитико-оперативную практику, определили ограниченность понимания функции даже Эйлером.

Все функции мыслятся у него представимыми степенным рядом

$$f(z) \sim a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

(где z , вообще говоря, комплексное). Следовательно, представление о всех функциях было по существу еще ограничено классом аналитических функций. Такое заблуждение вполне

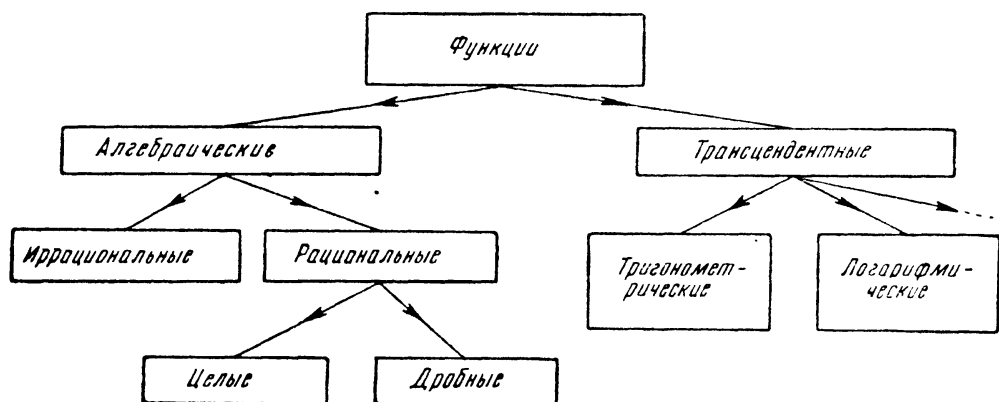


Рис. 1

объяснимо. Значительно позднее выяснилось, что поскольку к аргументу применяются только операции указанного выше класса, то и в результате будут получаться только функции аналитические всюду, кроме, может быть, изолированных особых точек, причем аналитичность сохранится и в сколь угодно малой окрестности этих точек, где функция допускает разложения в обобщенный степенной ряд. Поведение функции в малом участке определяет, по Эйлеру, поведение ее в целом, что свидетельствует о существовании у него в то время идеи аналитического продолжения.

Из того же определения функции как аналитического выражения выросло своеобразное определение непрерывности. Функция считалась непрерывной, если она задана на всей области существования единым аналитическим выражением. Так, непрерывными оказывались функции: $y = \frac{1}{x}$, $y = \operatorname{tg} x$ и т. п. Свойство непрерывности функции в смысле, привычном для нас, называлось связностью функции.

Разумеется, наряду с описанной концепцией понятия функ-

ции как аналитического выражения в работах Л. Эйлера, Ж. Даламбера и других математиков XVIII в. можно найти и другие определения. Возможны и другие трактовки этого понятия, отражающие ту мысль, что соответствие является его основным признаком. Однако представление функции как аналитического выражения было доминирующим.

Основным средством, позволяющим приводить функции к виду, удобному для оперирования с ними, было разложение их в степенные ряды. Опыт подсказывал математикам, что в ряды разложимы все известные им функции. Исключения из этого общего правила появились в основном позднее; в то время они были слишком немногочисленны, чтобы изменить сложившиеся представления и существенно повлиять на структуру теории функций. Поэтому после классификации функций и введения основных понятий в теории функций XVIII в. непосредственно следуют разделы оперативного характера, куда входят методы разложения функций в ряды и свойства последних.

В своем «Введении в анализ» Эйлер разработал многообразный аппарат изучения функций с помощью степенных рядов. Он изучил последовательно классы функций: рациональных, дробнорациональных, иррациональных, где особенно интересна система остроумных подстановок, устраняющих иррациональность. Затем следуют методы разложения в ряд показательных и логарифмических функций. Здесь впервые вводится и полностью разъясняется определение логарифма положительного числа как показателя степени, при возведении в которую выбранное основание дает заданное число: если $a^x = N$, то $x = \log_a N$. Затем выведена формула:

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i,$$

которая в более поздней символике записывается так:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

(здесь у Эйлера i — бесконечно большое число. Символ i — начальная буква слова infinite).

Тригонометрические функции также вводятся аналитически. Их определения уже не связываются столь тесно с геометрическим образом круга. В результате исследования их свойств выводится формула Эйлера

$$e^{\pm ni} = \cos v \pm i \sin v,$$

где i — мнимая единица. Формула выведена в характерной для того времени манере: вначале приводится формула Муавра:

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos n z \pm i \sin n z,$$

а отсюда

$$\cos n z = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2},$$

$$\sin n z = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}.$$

Принимая z за бесконечно малое, n за бесконечно большое, причем отношения между z и n таковы, что их произведение конечно: $n z \rightarrow v$, а также, что при этом

$$\cos z \rightarrow 1, \quad \sin z \rightarrow z = \frac{v}{n},$$

Эйлер находит

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2},$$

$$\sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

Откуда уже следует искомая формула:

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v.$$

Кроме разложения функций в ряды Эйлер разработал метод представления функций бесконечными произведениями, как, например:

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right) \cdots$$

Эти разложения были применены для упрощения вычисления логарифмов тригонометрических функций.

Для нужд интегрального исчисления в теории функций были собраны методы представления функций в виде суммы элементарных дробей. Наконец, для изучения свойств функций Эйлер применил аппарат непрерывных дробей. Было открыто также много фактов, полезных для будущей теории

функций комплексного переменного. Например, Даламбер и Эйлер в работах по гидродинамике показали, что эти функции имеют вид: $w = u + iv$ и что действительная и мнимая часть таких функций удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Даламбер в 1752 г., а Эйлер в 1755 г. показали, что эти условия достаточны для аналитичности функции w . Позднее (в 1777 г.) Эйлер доказал и необходимость этих условий, ныне ошибочно (в некоторых книгах) носящих название условий Коши—Римана.

В течение 30—40-х годов XVIII в. главным образом благодаря Эйлеру была разработана и систематизирована теория элементарных аналитических функций. Она тотчас же повлекла поток открытий, сопровождавшихся большими и страстными спорами. Особенно много споров вызывала трактовка функций комплексного аргумента.

Большое значение имел в этом плане спор о природе логарифмов комплексных чисел, начатый еще Лейбницем и И. Бернулли. Первый утверждал, что эти числа — мнимые, тогда как И. Бернулли отстаивал утверждение, что эти числа действительные. В 1749 г. Эйлер правильно решил этот вопрос. Он заметил, что значение $y = \ln x$ определяется из равенства

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i, \quad i = \infty.$$

Отсюда

$$x^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{y}{i}; \quad y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1),$$

что соответствует в современных обозначениях:

$$y = \ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Так как $x^{\frac{1}{i}}$, т. е. «корень с бесконечно большим показателем i », продолжает Эйлер, имеет бесконечно много разных значений, вообще говоря мнимых, то и логарифм имеет бесконечно много значений, вообще говоря мнимых. Однако споры не утихали, так как не была выяснена их основа: сущность понятия комплексного числа. Мы вернемся к этому вопросу еще раз в главе X.

Неясность существовала и в вопросе соотношении объемов классов аналитических и аналитически выражимых функций. Эйлер, как было сказано выше, считал их равносильными; всякое аналитическое выражение представимо рядом. Это убеждение разделяло подавляющее большинство математиков XVIII в. Даже в 1797 г., на рубеже XIX в., Лагранж пытался построить теорию аналитических функций, опирающуюся на утверждение, что всякая функция всюду, за исключением, быть может, отдельных значений аргумента, представима рядом Тейлора.

Накопившийся запас представлений о способах выражения функциональных зависимостей начал приходить, однако, в противоречие с этой концепцией. Тому же Эйлеру пришлось рассматривать и более общие классы функций, как было указано выше. Так, ему принадлежит идея рассмотрения функций, геометрически выраженных линиями, начерченными свободным движением руки. При этом неизбежно встала задача о соотношении объема данного класса и класса непрерывных (в смысле Эйлера) функций. Эйлер считал, что последний класс, по-видимому, беднее, потому что существование аналитической формулы определило бы однозначное аналитическое продолжение. Функции же, образованные свободным движением руки, не имеют такого ограничивающего условия.

Толчком к рассмотрению указанных проблем послужили задачи математической физики, в особенности задача о колебании струны. Этой принципиально важной задаче уделяли большое внимание еще в XVII в. многие ученые: Галилей, Мерсенн, Декарт, Гюйгенс и др.

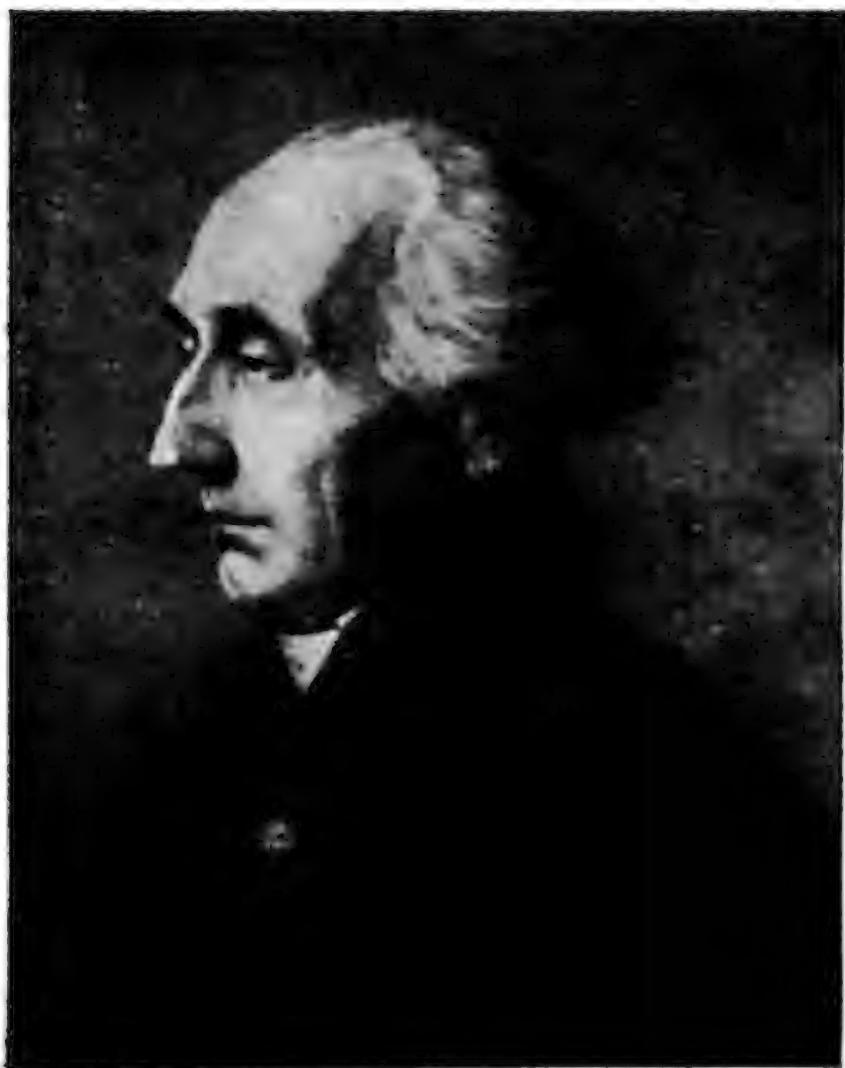
В 1715 г. Тейлор вывел уравнения колебания струны из условия, что ускорение точки струны, т. е. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ обратно пропорционально радиусу кривизны

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Для малых колебаний это дает

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Тейлор наложил на задачу еще одно условие, что все точки колеблющейся струны одновременно возвращаются на ось



Ж. Л. Лагранж
1736—1813

абсцисс. Это дало ему возможность утверждать, что $\rho = \frac{b^2}{a}$.

Тогда

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -b^2 y; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(ab)^2 y.$$

Принимая далее ось абсцисс за начальное положение струны, концы которой закреплены, Тейлор нашел решение уравнения в виде

$$y = A \sin bx \cdot \sin abt.$$

В 1747 г. Даламбер нашел общий интеграл этого уравнения. Пусть дано уравнение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

После замены $at = \tau$ оно примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right),$$

т. е.

$$\frac{\partial y}{\partial x} d\tau + \frac{\partial y}{\partial \tau} dx = du$$

является полным дифференциалом.

Обозначим

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = p, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = q.$$

Тогда

$$du = q d\tau + p dx,$$

$$dy = p d\tau + q dx,$$

откуда

$$d(y + u) = (p + q) d(\tau + x),$$

$$d(y - u) = (p - q) d(\tau - x).$$

И следовательно,

$$y + u = 2\varphi(at + x),$$

$$y - u = 2\psi(at - x),$$

$$y = \varphi(at + x) + \psi(at - x).$$

Здесь φ и ψ — произвольные функции, определяемые только начальными условиями.

Из условий закрепленности концов $y \Big|_{x=0}^{x=l} = 0$ Даламбер вывел:

$$y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x);$$

$$\varphi(z + 2l) = \varphi(z).$$

При этом он считал само собой разумеющимся, что функция непрерывна в смысле XVIII в., т. е. аналитическая и, следовательно, дифференцируемая.

Через год после работы Даламбера (опубликовано в 1750 г.) Эйлер ввел в рассмотрение этой же задачи соображение о том, что положение конечной колеблющейся струны в любой момент времени t_0 определено, если задано ее начальное положение $y|_{t=0} = f(x)$ и начальное распределение скоростей $\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x)$. Тогда функция $\varphi(x)$, введенная в решение, данное Даламбером, выражается через функции $f(x)$ и $g(x)$. Именно

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = f(x),$$

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{a} \int g(x) dx$$

(чтобы получить это выражение, в условии

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\varphi'(at + x) - a\varphi'(at - x) = g(x)$$

положим $t = 0$ и проинтегрируем обе части равенства).

Но, как замечает Эйлер, функции $f(x)$ и $g(x)$ вообще не непрерывные, а связные. Это обусловлено требованием сплошности струны. Следовательно, произвольная функция $y = \varphi(x)$, введенная Даламбером, не является, вообще говоря, непрерывной.

Вокруг проблемы определения природы функции $\varphi(x)$ разгорелся спор, длившийся около 50 лет. В него были вовлечены многие крупные ученые XVIII в. Спор, как это часто

бывает, перерос свои границы. Он превратился в спор о природе функций, входящих в состав интегралов уравнений с частными производными, а затем — вообще о соотношении между внутренними свойствами функций и характером выражающего их аналитического аппарата. Среди множества возникших в связи с этим проблем оставалась долгое время нерешенной старая проблема: являются ли связные линии, вычерченные свободным движением руки, непрерывными, точнее, аналитически выразимыми.

Решение этой проблемы оказалось возможным на путях обогащения средств аналитической выразимости функций. Эти пути в XVIII в. уже наметились в результате введения в математику аппарата тригонометрических рядов. В одной из своих 15 статей, посвященных задаче о колебании струны, Эйлер дал решение одного из частных случаев в виде тригонометрического ряда. Через пять лет, в 1753 г., петербургский академик Д. Бернулли предложил общее решение в аналогичной форме, исходя из физического соображения, что звук, издаваемый колеблющейся струной, складывается из основного тона и бесконечного множества обертонов. Именно:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

(l — длина струны, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, ...).

Однако Эйлер выступил против такой трактовки общего решения, так как, по его мнению, функция, предложенная Д. Бернулли, являлась недостаточно общей. В самом деле, она непрерывная, нечетная, периодическая. Поэтому, по Эйлеру, она могла выражать лишь частное решение, в крайнем случае — класс частных решений. Возникший спор привел к задаче: выяснить объем класса функций, представимых тригонометрическими рядами.

Дальнейшее развитие понятия функции, состава теории функций и ее места в системе математического анализа выходит за рамки XVIII в. Однако, чтобы не возвращаться далее к этому вопросу, изложим в основных чертах его дальнейшую историю.

В 1807 г. (опубликовано в 1822 г.) Фурье в работах по аналитической теории тепла доказал, что связные линии, заданные на конечных участках различными уравнениями, представимы на любом таком участке рядом

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$



Ж. Фурье
1768—1830

где коэффициентами будут выражения, получившие впоследствии название коэффициентов Фурье.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Все эйлеровские связанные кривые, начерченные свободным движением руки, оказались охваченными аналитическим аппаратом тригонометрических рядов. Несоответствие общих представлений о функциональной зависимости и ограниченных аналитических средств их выражения оказалось сглаженным. Создались условия для трактовки функций как соответствий весьма общего вида. Вскоре такие трактовки стали преобладающими. Так, в 1810 г. французский академик Лакруа писал: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или нескольких других количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, знаем мы или не знаем, через какие операции нужно пройти, чтобы перейти от этих последних к первой»¹. Аналогичное определение дано в «Аналитической теории тепла» Фурье: «Функция $f(x)$ обозначает функцию совершенно произвольную, т. е. последовательность данных значений, подчиненных общему закону или нет, и соответствующих всем значениям x , содержащимся между нулем и какой-либо величиной x »². Лобачевский в 1834 г. утверждал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x назвать число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими в связи понимать как бы данными вместе»³. Аналогичную трактовку понятия функции дали в 1837 г. Дирихле (1837) и другие ученые, и она сделалась общепринятой.

¹ Lacroix. Traité du calcul différentielle et du calcul integral, t. I. Paris, 1810, p. 1.

² J. B. J. Fourier. Theorie analytique de chaleur. Paris, 1835, p. 5.

³ Н. И. Лобачевский. Об исчезании тригонометрических строк. Собр. соч. Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 43.

Однако вскоре обнаружилось, что и ряды Фурье не являются универсальным аппаратом представления функций. Во всех случаях сходимости рядов Фурье, относящихся к непрерывным функциям, кроме непрерывности требовалось выполнение дополнительных условий: конечность производной, ограниченность изменения функции, кусочная монотонность, существование некоторого интеграла, выполнение неравенства и т. п. П. Дюбуа-Реймон в 1876 г. показал, что нельзя освободиться от дополнительных условий и ограничиться только свойством непрерывности функции. Он построил пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в некоторых точках¹.

При построении этого примера Дюбуа-Реймон использовал прием накопления особенностей при построении функции — прием, идущий от Больцано. Регулярное применение этого приема показало, что удастся построить непрерывную функцию $\Phi(x)$, периодическую на сегменте $[0, 2\pi]$ с накоплением особенностей в любой точке. Соответственно ряд Фурье будет расходиться в любой точке указанного сегмента. Вновь образовался разрыв между арсеналом средств аналитической выразимости функций и общей трактовкой понятия функции². Грубо говоря, кривых снова оказалось больше, чем формул.

Еще более осложнилось дело к концу XIX в., когда понятие кривой приобрело большую абстрактность и общность, чем ранее. В 70-х годах XIX в. Г. Кантор построил общее понятие кривой средствами теории множеств³. Плоская кривая была определена у Кантора как множество точек на плоскости, связное, т. е. без изолированных точек, совершенное, т. е. замкнутое (содержащее все свои предельные точки), и всюду плотное на себе (любая его точка — предельная). Однако это было такое множество, которое нигде не плотно на плоскости (не имеет внутренних точек). Построение Кантора, естественно, было воспринято некоторыми математика-

¹ См., например, Г. М. Фиктенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. Гостехиздат, М., 1949, стр. 598—605.

² Теория рядов Фурье и вообще тригонометрических рядов в свою очередь получила мощные стимулы развития, приведшие ее к современному состоянию. В нее вошли общие признаки сходимости (начиная с работ Дирихле, 1837), понятия теоретико-множественного характера (Г. Кантор), меры и интеграла (Риман и в особенности Лебег, 1902—1906). В первой четверти XX в. в нее вошли крупные результаты Данжуа, Лузина, Меньшова, Бари и др. История этой математической дисциплины весьма богата фактами, но содержит еще много нерешенных проблем.

³ К построению теории множеств Кантор пришел, исходя именно из исследований относительно изображения функций, тригонометрическими рядами.

ми критически, как уводящее в сторону от возможности использовать сложившийся аналитический аппарат.

Этот недостаток будто бы устранялся в определении кривой К. Жордана, данном им в 1882 г.: плоская кривая есть совокупность точек плоскости, координаты которых заданы уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, правые части которых — непрерывные функции от параметра t на некотором отрезке $[t_0, T]$. Кривые Жордана оказались весьма разнородными и зачастую весьма сложными. Применение вычислительных алгоритмов к кривым этого класса еще более затруднилось, когда в 1890 г. Пеано открыл, что существуют кривые Жордана, могущие заполнять целиком все внутренние точки некоторого квадрата. Только частные классы этих кривых имеют сравнительно простую структуру. Например, когда существуют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$, тогда кривая есть линия, имеющая длину

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Тем не менее возможности для алгоритмического оперирования с функциями даже столь общей природы, как оказалось, сохранились. Только теперь они опирались на общую идею аппроксимирования функций, приближенного их воспроизведения. Способы аппроксимации, как известно, различны. Решающую роль в осуществлении этой идеи сыграли результаты Вейерштрасса. Он доказал в 1885 г., что любая функция $f(x)$, непрерывная в $[a, b]$, аналитически выражима на нем как сумма равномерно сходящегося ряда целых алгебраических полиномов: $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$.

Математический анализ XVIII в., в особенности та его часть, которую мы называли анализом функций, послужил истоком многих идей современной теории функций. В нем были созданы начала теории функций комплексного переменного. Как мы увидим далее, класс вариационных задач привел к созданию вариационного исчисления и возникновению ряда элементов современного функционального анализа. Выяснение широкого смысла понятия функции как причинного соответствия общей природы развилось впоследствии в теоретико-множественную концепцию этого понятия. Анализ всех возможных классов функций и их свойств оказался необходимым условием для появления современной конструктивной теории функций.

Изложенная выше история развития понятия функций в XVIII в. и позднее была бы неполна, если бы мы не отметили, что в этот период вместе с обогащением анализа функций изменилась его служебная роль. Из введения в анализ он превратился в одну из его высших областей — теорию функций. Свойства же элементарных функций вошли составной частью в оперативные исчисления — дифференциальное и интегральное. Место введения в анализ заняли теория действительного числа и теория пределов.

Проблема обоснования анализа бесконечно малых. Работы по вопросам обоснования анализа, появившиеся в течение XVIII в., настолько многочисленны, что составляют большую самостоятельную отрасль математической литературы вообще.

Одной из самых характерных черт анализа бесконечно малых в XVIII в. была невыясненность его исходных понятий, невозможность объяснить рационально правомерность введенных операций. Взгляды создателей анализа на этот предмет не отличались ни постоянством, ни определенностью. Как Ньютон, так и Лейбниц предприняли множество попыток объяснения своих исчислений, не достигнув успеха. Их ближайшие последователи только усугубили путаницу. Практические успехи анализа бесконечно малых приходили во все увеличивающееся противоречие с его неясными, зыбкими основами. Анализ бесконечно малых переживал мистический, по определению К. Маркса, период своего развития.

Уязвимость такого положения вскоре дала себя знать. У анализа бесконечно малых появились противники, ставящие под сомнение или отвергающие его методы, результаты и в особенности трактовку основных понятий. Приверженцы же могли противопоставить этим возражениям лишь накопление практически важных результатов. К. Маркс по этому поводу писал: «Итак, сами верили в мистический характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызвали таким образом враждебный крик, отозвавшийся даже в мире несведущих в математике людей и бывший необходимым для того, чтобы проложить путь новому»¹.

¹ К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 65.

Видная роль во враждебных выступлениях против анализа бесконечно малых принадлежала ирландскому епископу, видному философу-идеалисту Дж. Беркли, который был озабочен укреплением позиций религии, расшатываемых под влиянием грандиозных успехов естественных наук. Наряду с другими сочинениями философского характера, где он отстаивал позиции субъективного идеализма, Беркли издал в 1734 г. трактат «Аналист, или рассуждение, обращенное к одному неверующему математику», в котором он стремился доказать, что анализ (как и все области науки) имеет отнюдь не большую обоснованность, чем догматы богословия.

Критические аргументы Беркли были весьма характерны для субъективного идеалиста. Они состояли из утверждений о чувственно-интуитивной несообразности, невосприимчивости понятия флюксий и способа их последовательного образования, а также о логических противоречиях в высказываниях Ньютона относительно оснований анализа.

Возникла оживленная полемика, способствующая в конечном счете выяснению спорных вопросов. Она не входила в расчеты Беркли, и он вскоре отошел от этой специальной темы, отнюдь не изменив своих общих воззрений. Однако критический пересмотр проблемы обоснования анализа бесконечно малых продолжался в среде математиков с большой интенсивностью. Он был остро необходим.

Самой первой реакцией английских математиков (Джарин, Робинс, Пимбертон, Маклорен и др.) явилась защита теории флюксий и авторитета Ньютона путем комментирования его трудов и внесения в них частичных усовершенствований. При этом было высказано немало полезных мыслей. Так, например, привлечено внимание к правильному толкованию понятия предела переменной величины. Однако этот путь оказался, как и следовало ожидать, исторически бесплодным.

Виднейшие математики, занимавшиеся в середине XVIII в. проблемой обоснования анализа бесконечно малых, видели свою задачу пока еще только в рационализации его основ, в устранении пробелов, неясностей, мистического оттенка. Среди многих попыток этого периода, который К. Маркс называл «рациональным», особенно выделяются теории Эйлера и Даламбера.

Для Эйлера и его последователей (Торелли и др.) дифференциальное исчисление Лейбница не должно было трактоваться как исчисление дифференциалов, сопровождающе-

еся отбрасыванием бесконечно малых. По Эйлеру, дифференциальное исчисление есть метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых функциями, когда их аргументам даются исчезающие приращения. Основным понятием здесь является не дифференциал, а производная. Что же касается бесконечно малых, или дифференциалов, то они есть просто точные нули. Производные, следовательно, имеют вид $\frac{0}{0}$, требуется лишь выбирать то значение, к которому стремится (приближается) отношение конечных разностей $\Delta y = y_1 - y$ и $\Delta x = x_1 - x$, уменьшившихся каждое до нуля.

Теория нулей Эйлера не могла быть признана удовлетворительной. Она лишь затушевывала, маскировала реальные предельные переходы, которые практически совершались при дифференцировании функций. К тому же дифференциалы, объявленные нулями, вскоре появляются у самого Эйлера в виде главных линейных частей приращения функций. Без них оказалось невозможно обойтись.

Теория Даламбера также возникла на почве критического пересмотра наследия Ньютона и Лейбница с целью выявления их рациональной сущности. Этот пересмотр заставил Даламбера отдать предпочтение методу первых и последних отношений Ньютона. Этот метод Даламбер развил, придав ему форму метода пределов. «Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы ни была мала эта последняя, причем, однако, приближающаяся величина никогда не сможет превзойти величину, к которой она приближается», — писал Даламбер.

Отсюда видно, что переменные, по Даламберу, — монотонны, предел — односторонний. Кроме того, чтобы избежать оперирования с нулями, Даламбер ввел требование, чтобы предел не совпадал ни с каким значением переменной.

Вычисление производных, по Даламберу, состоит из следующих операций: переменному аргументу x дается конечное приращение Δx ; функция $y = f(x)$ получает вследствие этого конечное же приращение Δy ; составляется отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и упрощается; наконец, полагают $\Delta x = 0$. Подобный метод фактически основывается на предположении, что разложение $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ в ряд по степеням Δx уже известно, что по существу эквивалентно утверждению, что найдена и сама производная и ее остается только «высвободить из ее окружения», по выражению К. Маркса.

Теория пределов имела многих последователей. В 1786 г.

швейцарец Люиле победил на конкурсе, объявленном Берлинской академией наук (президентом которой был Лагранж) на тему о ясной и точной теории математических бесконечно больших и бесконечно малых величин. Его сочинение «Элементарное изложение начал высших исчислений» было построено на базе теории пределов. В нем производная $\frac{dy}{dx}$ была введена как символ выражения $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Страстными приверженцами и пропагандистами метода пределов были петербургский академик С. Е. Гурьев и его последователи П. А. Рахманов и академик В. И. Висковатов.

Однако теория пределов XVIII в. не получила признания у большинства современников. Главной причиной этого была органически присущая понятию предела неалгоритмичность. «Методу пределов, — писал в 1797 г. Л. Карно, — свойственно одно серьезное затруднение, не имеющее места в анализе бесконечно малых: именно, в нем нельзя, как в этом последнем, отделять бесконечно малые количества друг от друга, и так как количества в нем всегда связаны друг с другом, то невозможно ни использовать при вычислениях свойства, принадлежащие каждому из них в отдельности, ни подвергать уравнения, в которых они встречаются, преобразованиям, способствующим их исключению». Определение предела как одностороннего недостижимого предела монотонной последовательности было недостаточным, неразвитым. Оно еще должно было развиваться в понятие предела функции, освободившись от подобных ограничений. Наконец, теория пределов еще не включила в себя понятие сходимости последовательностей и, что еще более важно, критерия этой сходимости, введенного лишь в первой половине XIX в. Коши и Больцано. Словом, эта теория, чтобы стать общепризнанной и общеупотребительной, должна была, помимо строгости в выяснении смысла основных понятий анализа, приобрести алгоритмический аппарат.

Поэтому не удивительно, что ко второй половине XVIII в. выявилась еще одна концепция обоснования анализа, названная К. Марксом алгебраической. Ее сущность состояла в том, чтобы положить в основу анализа понятие производной, определение которой включало бы эффективный способ ее отыскания, не опирающийся на туманные понятия бесконечно малой, предела и т. п. Операцию дифференцирования, согласно этой концепции, следовало бы заменить алгебраическим приемом или каким-либо другим специальным алгоритмом.

По-видимому, первые работы в области алгебраического дифференциального исчисления появились в Англии. В 1748 г. вышло «Учение об ультиматорах» Джона Киркби, неудачное и тотчас же забытое. Через несколько лет в двух работах (1758—1764) Джон Ланден развил «анализ вычетов». В последнем рассматривались выражения вида $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$. Значение такого выражения при $x_1 = x$ Ланден называл «специальным значением», или «отношением вычетов», и ввел для него символ $[x \text{ — } y]$. Разыскание «специального значения» для элементарных алгебраических функций в «анализе вычетов» опиралось на теорему

$$\frac{x^{\frac{m}{n}} - v^{\frac{m}{n}}}{x - v} = x^{\frac{m}{n} - 1} \frac{1 + \frac{v}{x} + \left(\frac{v}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{x}\right)^{m-1}}{1 + \left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{2m}{n}} + \dots + \left(\frac{v}{x}\right)^{(n-1)\frac{m}{n}}}.$$

При $v = x$ получается значение производной для $y^{\frac{m}{n}}$:

$$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}.$$

Рассуждения Ландена, как и других приверженцев алгебраического обоснования анализа, по существу опирались на самоочевидность разложения функций в ряд. Их алгебраические приемы были пригодны фактически лишь для полиномиальных функций. Распространение этих приемов даже на класс аналитических функций связано с трудностями, с которыми их авторы не умели справиться (распространение на бесконечные ряды свойств конечных сумм, представимость функций степенным рядом и т. п.).

Самой серьезной работой, выяснившей полностью возможности алгебраического дифференциального исчисления и определившей его судьбу, была большая работа Лагранжа «Теория аналитических функций, содержащая принципы дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых или исчезающих пределов и флюксий, сведенные к алгебраическому анализу бесконечных количеств» (1797)¹. Ее исходным и центральным пунктом

¹ J. L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques... Oeuvres de Lagrange, t. IX. Paris, 1881, pp. 15—427.

было стремление доказать теорему, что всякая функция $y = f(x + h)$ почти всюду (быть может, за исключением дискретных значений аргумента) разложима в степенной ряд

$$f(x + h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$$

Доказательство Лагранж строил таким образом, что исключал все особенные случаи (возможность появления членов разложения с отрицательными или дробными степенями h и т. п.). Тем самым он выделил для исследования класс аналитических функций, отнеся остальные функции к разряду исключений. Это было отмечено позднее Вейерштрассом, по инициативе которого за функциями, представимыми степенными рядами, было сохранено название *аналитические*. Степенные ряды Лагранж использовал для приближения функций полиномами, опираясь на то, что для всех достаточно малых h каждый член разложения будет больше суммы следующих за ним членов. При этом для конкретных функций он вывел формулу остаточного члена и ввел в употребление теорему о среднем.

Последовательные производные определены Лагранжем как коэффициенты при последовательных степенях h , с точностью до соответствующих числовых коэффициентов. Последующее изложение дифференциального исчисления было проведено Лагранжем в этом же сочинении.

Таким образом, дифференциальное исчисление, по мысли Лагранжа, должно было представлять часть алгебры, отличающуюся лишь специфическими алгоритмами. «Алгебра есть не что иное, как теория функций. В алгебре искомые количества должны быть функциями данных количеств, т. е. выражениями, представляющими различные операции, которые нужно произвести над этими количествами, чтобы получить значения искомым. В алгебре, в собственном смысле слова, рассматривают только первоначальные функции, происходящие из обычных алгебраических операций; это первая ветвь теории функций. Во второй ветви рассматривают производные функции, и это та ветвь, которую мы называем просто «Теорией аналитических функций» и которая содержит все, относящееся к новым исчислениям»¹ — так пояснил эту свою мысль Лагранж.

Однако вскоре выяснилось (и Коши сыграл в этом главную роль), что теория Лагранжа некорректна. Основная теорема о разложении функций в ряд по существу опиралась на неявное предположение, что всякая функция разложима

¹ J. L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques... Oeuvres de Lagrange, t. IX, p. 16.

в ряд Тейлора. Этот порочный круг оказался неустранимым. Кроме того, Лагранж не смог избежать неявных апелляций к бесконечно малым и к предельным переходам. Операции с рядами тоже оказались необоснованными, так как они производились без исследования сходимости ряда.

В обстановке острой борьбы обнаруживалась несостоятельность одного за другим почти всех способов обоснования математического анализа. Только по отношению к понятию предела критика вела не к отказу от концепций, основывающихся на нем, а к их уточнению. Но это понятие трудно и долго входило в анализ, так как всякий раз возникали трудности, связанные с вопросом о существовании предела и о способах эффективного его нахождения. Подобные трудности существовали долго, до конца XIX в., когда был создан « ϵ , δ -аппарат» теории пределов.

Идеи К. Маркса о путях развития математического анализа. В изложении проблемы обоснования анализа бесконечно малых в XVIII в. мы неоднократно ссылались на ряд идей К. Маркса, содержащихся в его математических рукописях. В предыдущем параграфе мы целиком исходили из этих идей; исследования Маркса имеют для нашей науки основополагающий характер. Дадим здесь их краткий обзор, отнюдь не претендуя на полноту анализа содержания всех математических рукописей Маркса.

Математикой Маркс начал заниматься в конце 50-х годов прошлого века в связи с работой над «Капиталом» и не прекращал этих занятий до последних дней своей жизни. Работая самостоятельно, он помимо применений математики к исследованию экономических проблем перешел к систематическим занятиям математическим анализом. Здесь он поставил перед собой задачу — сорвать покров тайны, окружавшей основные понятия и методы дифференциального исчисления со времен Ньютона и Лейбница. Труднейшая задача обоснования анализа бесконечно малых сделалась для Маркса пробным камнем применения метода материалистической диалектики к математике. При решении этой задачи Маркс проделал большую предварительную работу. Он изучил и критически сравнил многочисленные учебники математического анализа для высших школ Англии и Франции и познакомился с некоторыми классическими произведениями Ньютона, Эйлера, Маклорена и др.

В ходе этой работы К. Маркс убедился в неудовлетворительности почти всех попыток обоснования анализа, кроме теории пределов, важнейшим представителем которой являл-

ся Коши. В конце 70-х годов Маркс приступил к изучению теории пределов и к обработке и систематическому изложению складывающейся у него собственной точки зрения. Смерть (14 марта 1883 г.) прервала занятия. Исследования остались неоконченными. Математические рукописи К. Маркса в той части, которая относится к математическому анализу, отражают эту большую работу.

Для К. Маркса анализ бесконечно малых не является изолированной, обособленной областью математики. Он представляет собой закономерно возникший новый этап исторического развития математики. Поэтому задача выявления логической структуры анализа в подавляющей части сводится к анализу его истории. Эта история начинается с накопления неразвитых форм, прообразов, понятий и операций анализа, ведущих к переходу от алгебры конечного к алгебре бесконечного, включающей в себя бесконечные ряды, интеграционные и дифференциальные методы. Появление собственно дифференциального и интегрального исчисления связано уже с изобретением специфических алгоритмов.

Работая над выяснением диалектического перехода от алгебры к анализу бесконечно малых, К. Маркс обращал внимание на то, что основатели дифференциального и интегрального исчисления, равно как и ученые более позднего времени, с самого начала действовали на почве самого исчисления и не искали его алгебраических истоков. Ньютон «был еще слишком поглощен разработкой самих дифференциальных операций, которые у Тейлора и Маклорена предполагаются как данные и известные. Кроме того, Ньютон... пришел к ним сперва от механических, а не принадлежащих чистому анализу исходных положений. — Что касается... Тейлора и Маклорена, то они с самого начала работали и действовали на почве самого дифференциального исчисления и поэтому не имели никакого повода к тому, чтобы искать возможно более простых алгебраических истоков этого исчисления тем более, что спор между ньютонианцами и лейбнизианцами вращался вокруг определенных, уже готовых форм исчисления, как новооткрытой, совершенно особой, как небо от земли отличной от обыкновенной алгебры математической дисциплины... Действительные и потому простейшие связи нового со старым всегда открываются лишь, когда само новое принимает уже законченные формы...»¹.

¹ К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 93—94.

В истории обоснования дифференциального исчисления в XVIII в. К. Маркс различал следующие периоды:

1. Мистическое дифференциальное исчисление. В силу того что основоположники анализа бесконечно малых, в первую очередь Ньютон и Лейбниц, приращение с самого начала отождествляли с дифференциалом, они могли получать правильные результаты лишь посредством отбрасывания бесконечно малых более высоких порядков. Это с неизбежностью приводило к тому, что дифференциалу приписывались какие-то особые, таинственные свойства, что бесконечно малые рассматривались как некие мистические величины: и нули, и не нули одновременно. К. Маркс не видел в этом решительно никакой диалектики и считал такую трактовку неправильной. В то же время он высоко оценивал открытие дифференциального и интегрального исчисления и подчеркивал то обстоятельство, что борьба мнений, развернувшаяся вокруг этого открытия, была необходимой, чтобы проложить путь новому¹.

2. Рациональное дифференциальное исчисление исправляет методы Ньютона и Лейбница. Его виднейшими представителями были Эйлер и Даламбер. Как мы разъясняли выше, определение производной, по Даламберу, проведено более строго, но реальный (эффективный) способ нахождения производной при этом не выявляется. Больше того, составление отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и последующие операции с ним основываются на предположении, что разложение $f(x+\Delta x)$ в ряд по степеням Δx уже найдено, что эквивалентно нахождению искомой производной, которую остается только «высвободить из ее окружения».

3. Алгебраическое дифференциальное исчисление. Лагранж, главный представитель этого течения, уже явно исходит из разложимости функции $f(x+h)$ в ряд по степеням h и определяет производную как коэффициент того члена ряда, который содержит приращение h в первой степени. Вопрос об алгоритмах нахождения производной для тех или иных классов функций остается, таким образом, открытым. Больше того, Лагранж так и не доходит до собственно дифференциального исчисления. Дифференциальные символы у него представляют собой просто «дело номенклатуры, которая одна лишь остается от собственно дифференциального исчис-

¹ К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 42.

ления». К. Маркс также отметил, что в приложениях своей аналитической теории функций Лагранж сам постоянно использует то или другое из отвергаемых им «метафизических» представлений: ньютоновы флюксии, лейбницева бесконечно малые, даламберовские предельные значения отношений исчезающих величин, а также специфическую для дифференциального исчисления символику.

Остановимся еще на некоторых других идеях К. Маркса области основ математического анализа. Задача, которую он ставил перед собой, состояла для начала в выяснении сущности дифференциального исчисления как такового, г. е. как особого математического исчисления, оперирующего с характерными для него символами. В соответствии с этим К. Маркс прежде всего выявлял реальную сущность процесса дифференцирования.

По К. Марксу, производная $f'(x)$ от функции $y=f(x)$ получается следующим образом: образуется (если это возможно) «предварительная» производная, т. е. функция

$$\Phi(x, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Значение этой функции для $x_1=x$ (если оно существует) и есть производная от данной функции. К. Маркс искал алгоритмы, позволявшие (в простейших случаях) непосредственно находить по выражению функции ее производную. Так, в случае степенной функции $y=x^n$

$$\begin{aligned}\Phi(x, x_1) &= \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x \cdot x_1^{n-2} + x^2 x_1^{n-3} + \dots + \\ &+ x^{n-2} x_1 + x^{n-1},\end{aligned}$$

что при $x_1=x$ дает

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Такого рода способы непосредственного нахождения производной К. Маркс называл «алгебраическим» дифференцированием. Термин «алгебраическое» употреблялся им в том же смысле, как и у многих математиков XIX в.: как не требующее использования понятия бесконечно малой величины.

«Алгебраическое» дифференцирование К. Маркса допускает символическое отображение в общепринятом в его время виде. Обозначив

$$x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y,$$

причем $\Delta x \neq 0$, К. Маркс получал для предварительной производной символическое выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Соответственно обозначение производной $f'(x)$ будет $\frac{dy}{dx}$. Этот символ, который К. Маркс (в соответствии с употреблявшейся в его время терминологией) называл «символическим дифференциальным коэффициентом», непосредственно имеет смысл только в целом. Однако в силу способа образования производной можно рассматривать выражения

$$f'(x) dx = dy.$$

Эта формула верна и для дифференцирования сложной функции. В этом случае она используется как оперативная формула, позволяющая (в довольно широких предположениях) свести нахождение производной от функции

$$F(t) = f[\varphi(t)]$$

к отысканию производных $f'(x)$ и $\varphi'(t)$. Для этого достаточно в формулу для дифференциала подставить

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt.$$

Но таким образом происходит оборачивание метода. Мы следуем не от реального математического процесса образования производной к ее символическому выражению, а, наоборот, опираясь на символическую формулу, находим выражение для производной. Первым нетривиальным примером такого оборачивания метода является дифференцирование произведения $y = uz$. Обращаясь к выводу формулы

$$\frac{d(uz)}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx},$$

К. Маркс указывал, что символические дифференциальные коэффициенты становятся при этом самостоятельным исходным пунктом. Их «реальный эквивалент лишь должен быть найден... Но тем самым и дифференциальное исчисление выступает как оперирующее на своей собственной почве. Ибо его исходные пункты: $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ — суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины. И это обращение метода получилось здесь как результат алгебраического дифференцирования uz . Таким образом, алгебраический метод сам собой превращается в противоположный ему

дифференциальный... Но тем самым символические дифференциальные коэффициенты тотчас превращаются в оперативные символы, в символы процессов, которые должны быть произведены... Возникший первоначально как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций дифференцирования, — символический дифференциальный коэффициент играет теперь роль символа операций дифференцирования, которые лишь нужно еще произвести»¹.

К. Маркс не ограничивался понятием дифференциала как оперативного символа. В применении к вопросу о приближенном выражении приращения функции он использовал понятие дифференциала как главной линейной части приращения. Понятие дифференциала как оперативного символа, впервые открытое К. Марксом, и различие обоих понятий дифференциала приобретают, как это было показано советским математиком В. И. Гливенко, особенно важное значение в современных обобщениях понятия дифференциала на функциональный анализ.

В ходе работы над математикой К. Маркс интересовался широким кругом вопросов. Среди них: о применении математики в экономических исследованиях, о математических способах отображения движения и многие другие. Несмотря на незавершенность, математические рукописи К. Маркса имеют большое научное значение.

¹ К. Маркс. Математические рукописи. «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 28—29.

ГЛАВА III

РАЗВИТИЕ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В XVIII в.

Перестройка основ математического анализа происходила в обстановке, когда последний непрерывно одерживал большие и быстрые практические успехи. Эти успехи были так значительны, что многие исследователи последующих времен, говоря о математиках XVIII в., упрекали их за то, что они в погоне за практическими результатами оставались якобы безучастными к его шатким основам. Мы показали в предыдущей главе, что это было, конечно, не так.

В части оперативной анализ также был преобразован самым радикальным образом. Основной чертой преобразования была выработка удобного, действенного, развитого аппарата исчислений. В начале XVIII в. анализ подразделялся еще только на две части: дифференциальное и интегральное исчисление. Первое включало в себя, в частности, всю теорию рядов. Во втором же были сосредоточены методы решения всех так называемых обратных задач анализа бесконечно малых. Таким образом, в интегральное исчисление помимо методов интегрирования функций включалась вся теория дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными, а также вариационное исчисление.

Ярким примером такой нерасчлененности структуры математического анализа является рассмотренная выше серия монографий Эйлера.

Фактическое богатство анализа, накопленное в течение XVIII в., огромно. Оно слишком велико, чтобы предпринять в рамках настоящего учебника его систематическое перечисление или хотя бы обзор. Да в этом здесь и нет необходи-

мости. Мы ограничимся ниже указанием на некоторые наиболее характерные особенности развития дифференциального исчисления, интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальное исчисление. Вскоре после первых работ Г.-В. Лейбница выяснилось, что его исчисление дифференциалов и символика имеют большие преимущества перед исчислением флюксий и соответствующей системой символов. Они лучше отображали сущность операций анализа, и, последний, естественно, принял форму, в основном предуказанную Лейбницем. Однако в качестве основного понятия математики XVIII в., в отличие от Лейбница, приняли не дифференциал, а производную, как менее уязвимую в логическом отношении. Постановка задач дифференциального исчисления изменилась. Вслед за Эйлером оно стало трактоваться большинством математиков как метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, дается исчезающее приращение.

В течение длительного времени дифференциальное исчисление сохраняло тесные связи с исчислением конечных разностей. Эта связь была в рассматриваемое нами время настолько тесной, что оба эти исчисления фактически объединялись в единое исчисление для функций как непрерывного, так и дискретного аргумента. Помимо обычных соображений, в которых учитывается «молодость» и нерасчлененность анализа, такое положение объяснялось, по-видимому, большим прикладным значением исчисления конечных разностей для методов интерполяции, численного дифференцирования и интегрирования, приближенного решения дифференциальных уравнений. Не последнюю роль играли при этом соображения, связанные с доказательствами по аналогии. Совместное рассмотрение обоих исчислений создавало большие возможности для подобных аналогий.

Математики как XVII, так и XVIII в. много внимания уделяли развитию исчисления конечных разностей. В работах П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбница, Дж. Валлиса, И. Ньютона и др. сформировалась эта полезная область математики. Изобретатели анализа бесконечно малых ввели многочисленные аналогии между конечными разностями и дифференциалами, используя их для дальнейшего развития дифференциального исчисления. Вот один из примеров.

В 1711 г. Ньютон вывел известную интерполяционную формулу¹

$$f(a + n \Delta x) = f(a) + n \Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(a) + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f(a) + \dots + \Delta^n f(a),$$

где n — целое положительное число,

$$\Delta f(a), \quad \Delta^2 f(a), \quad \Delta^3 f(a), \dots$$

последовательные конечные разности функции $f(x)$ при $x=a$:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x),$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x + \Delta x) - \Delta^2 f(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

Отправляясь от этой формулы Ньютона, Тейлор распространил ее на случай бесконечно большого числа членов, где Δx стремится к нулю, но, однако, так, чтобы $n \cdot \Delta x = h$ было конечным. Тогда

$$f(a + h) = f(a) + h \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h - \Delta x)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \\ + \frac{h(h - \Delta x)(h - 2\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 f(a)}{\Delta x^3} + \dots$$

превратилось у него в

$$f(x + h) = f(x) + h \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \dots$$

Подобное использование аналогий и параллельное развитие дифференциального исчисления и исчисления конечных разностей было характерно для анализа XVIII в. Особенное распространение эта черта получила к середине века, что ярко продемонстрировал, например, Эйлер в своем «Дифференциальном исчислении» (1755). Он посвятил, в частности, первые две главы систематическому изложению

¹ И. Ньютон. Конечные разности. В кн.: И. Ньютон. «Математические работы». ОНТИ, М., 1937, стр. 210—217.

теории конечных разностей в объеме, превышающем дальнейшее ее применение в настоящем сочинении к интерполированию рядов, преобразованию их в целях улучшения сходимости, и тому подобным вопросам.

Основным аппаратом дифференциального исчисления являлось разложение функций в степенные ряды. Сравнительно богатый арсенал средств, накопленный предшественниками, в самом начале века обогатился теоремой Тейлора. Последний нашел ее, как мы показали выше, на путях аналогий с исчислением конечных разностей, экстраполируя на исчисление дифференциалов интерполяционную формулу Ньютона. В 1712 г. Тейлор уже сообщил свою теорему в одном письме. Публикуя ее в «*Methodus incrementorum directa et inversa*» (1715), Тейлор дополнил ее выводом для частного случая, носящего ныне название ряда Маклорена. Последний дал новый вывод этой теоремы в 1742 г.

Регулярное применение рядов Тейлора и Маклорена сделалось характерной особенностью дифференциального исчисления. Их значение оказалось настолько большим, что когда в 1784 г. Кондорсе присвоил им имена их открывателей, то это было воспринято как само собой разумеющийся факт. Задача разложить в ряд элементарными путями все известные функции и тем самым обеспечить эффективность операций дифференциального исчисления сделалась не только актуальной, но и, казалось, достижимой. На пути ее осуществления были достигнуты крупные успехи. Все известные математикам XVIII в. (и, по-видимому, все возможные) функции обнаруживали свойство разложимости в степенные ряды, бесконечные произведения и т. п., и с ними оказывалось возможным оперировать. Огромное увеличение фактов дифференциального исчисления, кажущееся пренебрежением к необходимости более глубокого изучения свойств рядов создали прецеденты для неправильных оценок творчества математиков XVIII в. в области математического анализа. С разной степенью определенности различные авторы писали о формализме и беспечности в этих вопросах.

Однако это не соответствует действительности. Первые же трудности выдвинули проблему сходимости рядов. Уже в 1715 г. П. Вариньон сформулировал относительно биномиальных разложений ряд требований, сущность которых сводилась к тому, чтобы члены разложения неограниченно уменьшались, равно как и остаток ряда. Усилия, направленные на замену смутных метафизических рассуждений точным

определением сходимости, продолжались в течение всего столетия. При этом основные заслуги математиков XVIII в. можно сформулировать в трех пунктах: вывод и исследование различных форм остаточного члена ряда; преобразование рядов с целью получить ряд, заведомо сходящийся; творческое осмысление оперирования с расходящимися рядами.

В 1754 г. Даламбер при выводе ряда Тейлора высказал соображения, сводящиеся к представлению остаточного члена n -кратным интегралом. Эйлер, не прибегая к этой идее, стремился отыскать иные критерии сходимости, рассматривая модули разностей сумм членов ряда, взятых в конечном числе. В 60-х годах идея различения сходящихся и расходящихся рядов проникла в учебники, например в учебники Кестнера (1760 и 1761 гг.). В 1768 г. Ламберту удалось строго доказать ряд теорем относительно сходимости разложения числа π в цепную (непрерывную) дробь. В конце века, в 1797 г., Лагранж представил остаточный член ряда Тейлора сперва в интегральном виде, а затем в виде, в котором он находится в современных учебниках под его именем. Усилия математиков XVIII в. найти правильное понимание проблемы сходимости (равно как и их ошибки) создали к началу XIX в. условия для строгого подхода к ее решению. Новый этап теории рядов, характеризующийся регулярными строгими оценками остаточных членов и характера сходимости, начинается в первые десятилетия XIX в. и связан в первую очередь с работами Коши.

О большом внимании к проблеме сходимости свидетельствуют работы по улучшению сходимости рядов. Многие преобразования рядов, производимые с целью получить сходящиеся ряды, принадлежат Эйлеру. Вот пример: дан ряд

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \dots$$

Производится замена переменных

$$x = \frac{y}{1-y} = y + y^2 + \dots$$

$$S = a(y + y^2 + \dots) - b(y + y^2 + \dots)^2 + c(y + y^2 + \dots)^3 - \dots$$

$$\begin{aligned} S &= ay + (a-b)y^2 + (a-2b+c)y^3 + \dots = \\ &= ay + \Delta a \cdot y^2 + \Delta^2 a \cdot y^3 + \dots \end{aligned}$$

Затем новая замена переменных $y = \frac{x}{1+x}$ приводит к

$$S' = a \frac{x}{1+x} + \Delta a \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \Delta^2 a \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + \dots$$

Если ряд S сходится, то ряд S' сходится к этой же сумме. Но существуют такие значения x , для которых S' сходится, а S — расходится.

Оперирования с рядами вне области их сходимости приводили к парадоксальным результатам (или, по выражению Абеля, к «омерзительным равенствам»). Однако Эйлер нашел способы получать важные результаты анализа именно с помощью расходящихся рядов. Вообще Эйлер нередко оперировал с расходящимися рядами, видя для этого основания в индуктивном распространении на бесконечные ряды операций, применимых к полиномиальным функциям. Оправданием законности оперирования с расходящимися рядами для Эйлера было получение правильных результатов. Чтобы избежать несообразностей, следует, говорит он, правильно определить понятие суммы расходящегося ряда. При этом надо отказаться от обычных представлений, связанных со словом «сумма», и считать, что суммой ряда является конечное выражение, из разложения которого этот ряд возникает. Например, суммой ряда

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

будет $\frac{1}{1-x}$, потому что данный ряд получается из разложения последнего выражения. Такое определение оказывается более общим и предвосхищает многие важные идеи последующих времен, например идею аналитического продолжения, не говоря уже о возможности использования важного аппарата расходящихся рядов.

Наряду со степенными рядами в математический анализ вошли новые типы разложений функций. Стирлинг (1730) и Эйлер (1732) применили, например, разложения в асимптотические ряды. В 1748 г. Эйлер ввел тригонометрические ряды для решения задач математической физики. Это средство получило большое применение не только в работах Эйлера, но и в сочинениях других математиков: Д. Бернулли (1753) по уравнениям математической физики (например, решение уравнения колебания струны), Даламбера (1754) и одновременно Клеро по небесной механике. К концу XVIII в. Лаплас (1782 г., опубликовано в 1785 г.) и Лежандр (1783; опубликовано в 1786 г.) решили задачу о притяжении эллипсоидального тела, введя разложения в ряды по сферическим функциям.

Математический анализ в XVIII в. обогатился мощным и разнообразным аппаратом разложения функций в ряды раз-

личных видов. Этот аппарат был создан под сильным непосредственным давлением задач математической физики. В ходе его разработки постепенно были подняты проблемы изучения общих свойств рядов, главным образом их сходимости. Без этого систематическое использование созданного аппарата делалось затруднительным. Построение достаточно общей и строгой теории рядов сделалось к концу века первоочередной проблемой, от решения которой зависели практические успехи математического анализа.

Правила дифференцирования в подавляющем большинстве были получены еще в трудах Лейбница и братьев Бернулли. Расширение этих правил в связи с расширением класса исследуемых функций не представляло принципиальных трудностей. Так, вслед за аналитическим выражением тригонометрических, показательных и других классов функций были немедленно получены аналитические выражения их производных.

Накопление фактов дифференциального исчисления происходило быстро. В «Дифференциальном исчислении» (1755) Эйлера это исчисление появляется уже в весьма полном виде. Например, теорема о независимости значения частных производных от порядка дифференцирования была известна еще в начале века. Эйлер дал ей доказательство, распространив последнее на частные производные высших порядков. В теории полного дифференциала Эйлер показал, что в

$$df(x, y) = P dx + Q dy$$

частные производные должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Символы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, однако, были введены позднее, около 1786 г., Лежандром. Необходимость, а затем достаточность данного условия, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом, была доказана Эйлером. Он же, рассматривая функции трех переменных $f(x, y, z)$ и их полные дифференциалы вида $Pdx + Qdy + Rdz$, ввел условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

С именем Эйлера связаны также формулы дифференцирования сложных функций, теорема об однородных функциях и многие другие факты.

Правила определения экстремумов функций одной переменной $y=f(x)$ были даны Маклореном. Эйлер разработал этот вопрос для функций двух переменных. Лагранж показал (1789), как отличать вид условного экстремума для функций многих переменных, а затем (1797) применил для их исследования метод неопределенных множителей, носящий поныне его имя. Упомянем, наконец, вопрос об исследовании неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, полностью изложенном Эйлером.

Дифференциальное исчисление в течение XVIII в. накопило почти все богатство фактов, характерных для современной его структуры. В нем был разработан сильный аппарат представления функций рядами. Оно приобрело достаточно развитую аналитическую форму. Помимо общих проблем рационального истолкования его основных понятий, связанных с невыясненностью понятия бесконечно малого количества и рассмотренных нами в предыдущей главе, перед ним встали новые проблемы обоснования. Эти проблемы относились к суммируемости рядов, разложимости функций в ряды различных типов, условий существования интегралов от заданных полных дифференциалов и т. п.

Интегральное исчисление. Создатели анализа бесконечно малых ввели интегральное исчисление, рассматривая обратные задачи своих исчислений. В теории флюксий Ньютона взаимная обратность задачи вычисления флюксий и флюент проступала особенно явно. У Лейбница вопрос был сложнее: интеграл появился вначале как определенный, как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых дифференциалов. Однако и у него интегрирование практически сводилось к отысканию первообразных функций. Идея неопределенного интегрирования была вначале доминирующей.

Обратные задачи были поставлены при этом в самом общем виде. Интегральное исчисление включало еще в себя помимо интегрирования функций задачи и теорию дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, теорию специальных функций и т. п. Эти области математического анализа лишь постепенно отпочковались от интегрального исчисления в течение XVIII в. Интегральное исчисление в такой общей постановке необычайно быстро разрослось. Эйлеру понадобилось в 1768—1770 гг. три больших тома, чтобы дать его систематическое изложение. Первый том этого колоссального труда включал в себя в первой части собственно интегрирование функций; обыкновенные дифференциальные урав-

нения заняли вторую часть первого тома и весь второй том; третий том был отведен дифференциальным уравнениям с частными производными и вариационному исчислению. Однако, весь этот материал понимался еще все-таки как единое интегральное исчисление.

По Эйлеру, который выражал общепринятую точку зрения, интегральное исчисление являлось методом нахождения по данному соотношению между дифференциалами соотношения между самими количествами. Действие, которым это достигалось, называлось интегрированием. Исходным понятием такого исчисления, разумеется, был неопределенный интеграл. Само исчисление имело целью выработку методов отыскания первообразных функций для функций возможно более широкого класса.

Задача построения исчисления в основном была решена в течение первой половины XVIII в. Главные достижения в этом деле вначале принадлежали И. Бернулли, написавшему первый систематический курс интегрального исчисления (1742), затем — Эйлеру. Вклад последнего в интегральное исчисление необычайно велик. По справедливому замечанию Н. Н. Лузина об Эйлере, доведенные им до конца интеграции и найденные им квадратуры еще до сих пор образуют рамки всех современных курсов и трактатов по интегральному исчислению; математика в течение 150 лет после смерти Эйлера не могла пробить бреши в том кольце интеграций, которое было выковано Эйлером, и таким образом добавить новые квадратуры. В отношении интегрального исчисления современные учебники являются лишь переделками трактата Эйлера, только подновлением этого труда в отношении языка. Аналогичную оценку давал академик А. Н. Крылов.

Несмотря на кажущуюся чрезмерной категоричность этих суждений, они подтверждаются при конкретном рассмотрении знаменитого «Интегрального исчисления» Эйлера и сравнении его с современными учебниками по этой дисциплине. Интегральное исчисление в части методов неопределенного интегрирования достигло практически современного уровня во второй половине XVIII в.

Формирование совокупности методов нахождения первообразных функций сопровождалось выработкой общих понятий исчисления и соответствующей удобной символики. Эйлер, исходя из понятия неопределенного интеграла как основного, ввел целую систему определений. Интеграл вместе с произвольной аддитивной постоянной интегрирования он называл полным. Фиксирование произвольной постоянной

приводило к частному интегралу. Значение последнего при некотором определенном значении аргумента давало эквивалент определенного интеграла.

Эту стройную последовательность оказалось невозможным выдержать в прикладных вопросах (в случае когда первообразная не является элементарной функцией), и в соответствующих приближенных вычислениях определенное интегрирование вводилось как суммирование в смысле, аналогичном современному. Необходимое видоизменение символа Лейбница

$$\int f(x) dx$$

для случая определенного интегрирования было тоже найдено не сразу. Символ Эйлера

$$\int f(x) dx \left[\begin{matrix} ab & x = a \\ ad & x = b \end{matrix} \right]$$

(где вместо $f(x)$ еще стояло p) получил с 1779 г., по предложению Лапласа, соответствующий термин «определенный интеграл». Привычный нам (кажущийся таким естественным) символ

$$\int_a^b f(x) dx$$

был изобретен и введен Фурье только в 1819—1822 гг.

Параллельно с развитием интегрального исчисления возникали обобщения операции интегрирования. В 1743 г. Клеро ввел криволинейные интегралы

$$\int P dx + Q dy,$$

взятые вдоль кривой, в книге «Теория фигуры земли, основанная на началах гидростатики» (русский перевод вышел в 1947 г.). В 1770 г. Эйлер в связи с практическими задачами разработал и ввел двойное интегрирование. Через два года (в 1772 г.) Лагранж, рассматривая задачу о притяжении эллипсоида вращения (опубликовано в 1775 г.), ввел в математику тройные интегралы.

В ходе развития интегрального исчисления появился ряд задач специального характера. Попытки их решения повели к разработке новых областей математического анализа. Последние рано или поздно отделились от своего первоначального источника — интегрального исчисления XVIII в.

В этом плане прежде всего следует упомянуть о теории дифференциальных уравнений и о вариационном исчислении. Их мы рассмотрим далее специально, в соответствии с тем значением, которое эти отделы имели для дальнейшего развития математики.

Вычисление интегралов специальных видов уже в начале века привело к открытию ряда фактов теории специальных функций. Одним из первых было открытие эйлеровых интегралов первого и второго рода, т. е. соответственно бета-функции

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

(1730—1731) и гамма-функции

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

(1729—1730).

Интегрирование по частям, примененное к гамма-функции, дает:

$$\Gamma(a+1) = a \Gamma(a), \quad a > 0.$$

Если a — натуральное, то

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = \dots = a! \quad \Gamma(1) = 1$$

Это дало Эйлеру основание дать обобщенное определение факториала

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

В случае бета-функции при натуральных a и b

$$B(a, b) = \frac{1}{b C_{a+b-1}^{a-1}}$$

подобные соображения позволяют обобщить (как и понятие факториала) понятие биномиального коэффициента на случай непрерывно изменяющихся аргументов. Доказательство абсолютной сходимости для $a > 0$, $b > 0$, разумеется, еще не могло быть дано, как и рассмотрение этих функций для комплексных значений аргумента.

Из числа многих специальных интегралов можно отметить «интегральный логарифм»:

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t dt}{t},$$

приобретший вместе с функцией $\zeta(x)$ большое значение в аналитической теории чисел, например при исследовании проблемы распределения простых чисел в натуральном ряду.

Эйлер разложил интегральный логарифм $\text{li}(e^{-x})$ в ряд:

$$\text{li}(e^{-x}) = c + \ln x - \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots,$$

где c — постоянная Эйлера:

$$c = 0,577215\dots,$$

арифметическая природа которой не выяснена до настоящего времени.

Класс специальных, или трансцендентных, функций включал в себя также эллиптические функции, возникшие при обращении эллиптических интегралов, т. е. интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)}) dx$$

(где R — знак рациональной функции, $n=3$ или $n=4$, а полином $P_n(x)$ не имеет кратных корней). Свое название эти интегралы получили за то, что через один из них

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

(интеграл второго рода в нормальной форме Лежандра) выражается длина дуги эллипса

$$u = a \sin \alpha, \quad v = b \cos \alpha \quad (a < b)$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \\ &= a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Интегралы этого вида были применены многими математиками XVIII в. для вычисления длин дуг различных кривых. В 1761 г. Эйлер открыл теорему сложения эллиптических интегралов, а идея их обращения была впервые высказана в конце XVIII в. Гауссом. Теория эллиптических функций в основном была построена в XIX в. в трудах Абеля, Якоби, Лиувилля и других математиков.

Как уже было сказано, указанные функции являются одним из видов специальных функций — трансцендентными. Они имеют своим общим источником интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Другой основной класс специальных функций появляется, как известно, при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (функции Бесселя, Ламе, цилиндрические и т. д.).

При вычислении ряда трудных интегралов был применен также метод комплексных подстановок, связавший впоследствии интегральное исчисление с теорией функций комплексного переменного. Например, еще Даламбер и Эйлер утверждали, что

$$\varphi(x + iy) = M + iN$$

и одновременно

$$\varphi(x - iy) = M - iN.$$

Тогда

$$P + iQ = \int (M + iN) (dx + i dy),$$

$$P - iQ = \int (M - iN) (dx - i dy),$$

откуда

$$P = \int M dx - N dy, \quad Q = \int N dx + M dy.$$

Из того, что выражения под интегралами являются полными дифференциалами функций P и Q , следуют известные условия Даламбера—Эйлера

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Например, для гамма-функции

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

применение этой идеи имеет следующий вид.

Эйлер (1781 г., опубликовано в 1794 г.) производит замечу $x=ky$.

Тогда

$$\Gamma(n) = k \int_0^{\infty} e^{-ky} y^{n-1} dy.$$

Полагая затем

$$k = p + iq = r (\cos \alpha \pm i \sin \alpha),$$

он нашел

$$\int_0^{\infty} e^{-py} y^{n-1} \cos qy dy = \frac{\Gamma(n) \cos n \alpha}{r^n}$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-py} y^{n-1} \sin qy dy = \frac{\Gamma(n) \sin n \alpha}{r^n},$$

откуда в качестве частного результата (при $n=\frac{1}{2}$, $p=0$, $q=1$) получил интегралы, известные теперь под именем интегралов Френеля

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(учитывая, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}).$$

Другой частный результат Эйлер получил, положив во втором уравнении $n \rightarrow \infty$, откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-px} \sin qx dx}{x} = \alpha = \operatorname{arctg} \frac{q}{p},$$

а затем ($p=0$, $q=1$)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Целью подобных подстановок является стремление получать интегралы функций от одной переменной. При этом иногда в качестве исходного берется такой интеграл, значение которого уже известно, чтобы получить новые, более сложные интегралы. Так, Эйлер в одной из работ применил подобный метод к интегралу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z$$

и получил два новых интеграла

$$P = \int \frac{\cos(\vartheta + \omega) dv}{\sqrt{s}}; \quad Q = \int \frac{\sin(\vartheta + \omega) dv}{\sqrt{s}},$$

где

$$\vartheta = \text{const};$$

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{v^2 \sin 2\vartheta}{1 - v^2 \cos 2\vartheta};$$

$$s = \sqrt{1 - 2v^2 \cos 2\vartheta + v^4}; \quad \vartheta = \text{const}.$$

Лаплас рассматривал интегралы с мнимыми пределами.

Эта область интегрального исчисления играла важную роль в создании теории функций комплексного переменного, в качестве одного из ее источников.

Итак, в течение XVIII в. в интегральном исчислении сформировалась совокупность методов, близкая к его нынешнему составу и уровню. Это исчисление также дало начало новым отделам математического анализа, как, например, теории специальных функций. От него отделились и превратились в самостоятельные области математики теория дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. Интегральное исчисление послужило, наконец, одним из источников теории аналитических функций.

Дифференциальные уравнения. Перед создателями анализа задача интегрирования дифференциальных уравнений вначале выступила как часть более общей задачи: обратной задачи анализа бесконечно малых. Естественно, внимание вначале сосредоточилось на различных уравнениях первого порядка. Их решения разыскивались в виде алгебраических или элементарных трансцендентных функций с помощью более или менее удачно подобранных приемов. С целью сведения этой задачи к операции нахождения первообразных функций создатели анализа и их ученики стремились в каждом дифференциальном уравнении провести разделение переменных. Этот прием, которым теперь начинаются системати-

ческие учебные курсы теории дифференциальных уравнений, оказался, по-видимому, и исторически первым.

Около 1692 г. И. Бернулли нашел другой прием, используя в ряде задач умножение на интегрирующий множитель. Этот же прием успешно применял в 1720 г. его сын Николай Бернулли. Постепенно выяснилось, что метод интегрирующего множителя, по-видимому, можно рассматривать как общий метод интегрирования уравнений вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

трудно, однако, осуществимый в части подбора этого множителя.

Арсенал приемов решения дифференциальных уравнений включал также замены переменных. Лейбниц (1693), а затем И. Бернулли с помощью подстановки $y = xt$ решали однородные уравнения первого порядка. Уравнение И. Бернулли

$$a dy = yp dx + by^n q dx$$

$$(a = \text{const}, b = \text{const}, p = p(x), q = q(x))$$

было с помощью подстановки $y^{1-n} = v$ преобразовано (Лейбницем в 1693 г., И. Бернулли в 1697 г.) в линейное дифференциальное уравнение первого порядка. В ходе решения этого уравнения И. Бернулли предвосхитил метод вариации постоянных, введенный в 1775 г. Лагранжем. Наконец, к 1700 г. И. Бернулли сумел решить линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$\sum_{k=n}^1 A_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0,$$

вводя интегрирующий множитель вида x^p и последовательно понижая с его помощью порядок уравнения.

Эти, а также некоторые другие приемы имели, однако, разрозненный характер. Тем временем количество задач, сведенных к дифференциальным уравнениям, гигантски выросло. По существу все прикладные задачи анализа, известные в то время, требовали решения дифференциальных уравнений. Последние появились не только в большом количестве, но и в чрезвычайном разнообразии типов. Каждое из этих уравнений было продиктовано конкретной задачей математического естествознания, а его решение сулило открытие важной тайны природы или технического усовершенствования и овладение им.

Вопросы общей теории дифференциальных уравнений, разумеется, в начале XVIII в. не могли быть поставлены. Слишком был слаб аппарат, пригодный для решения дифференциальных уравнений, не выделены отдельные классы дифференциальных уравнений, не изучены их особенности. Оставался единственный путь — путь упорной, методической работы над решением возможно более широких классов уравнений. На этот путь стали все крупные математики того времени. Слишком важна и неотложна была задача. Количество сочинений и конкретных результатов, полученных ими, огромно и не поддается точному учету. Мы сможем здесь лишь наметить некоторые тенденции развития и указать на наиболее важные результаты.

Заметные результаты этой работы стали обнаруживаться уже в 20-х годах XVIII в. В 1724 г. итальянский математик Я. Риккати опубликовал разностороннее исследование уравнения, получившего, по предложению Даламбера (1769), название уравнения Риккати. Речь шла об интегрируемости в элементарных функциях нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^a \quad (1)$$

(α , a , b — постоянные). Риккати рассматривал первоначально это уравнение в более сложном виде

$$x^n \frac{dq}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{q},$$

где y и q — любые функции от x . Однако ему пришлось упростить задачу, положив $q = x^n$.

Исследованием уравнения Риккати занимались многие математики: Г. Лейбниц, Х. Гольдбах, Я. Бернулли, Н. Бернулли, Д. Бернулли и др. Д. Бернулли установил (1724), что это уравнение интегрируется в элементарных функциях, если

$$\alpha = -2 \quad \text{или} \quad \alpha = -\frac{4k}{2k-1},$$

(k — целое число). В 1738 г. Эйлер применил к решению этого уравнения теорию рядов. В это же время он начинает рассматривать общее уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

($P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — непрерывные функции), частными видами которого являются не только специальное уравнение Риккати, но и уравнение Бернулли (при $R(x)=0$) и линейное дифференциальное уравнение (при $P(x)=0$). Эйлер же в 60-х годах XVIII в. обнаружил, что при наличии двух частных решений интегрирование уравнения Риккати сводится к квадратурам. Если же известен один частный интеграл v , то оно может быть преобразовано в линейное дифференциальное уравнение подстановкой

$$y = v + \frac{1}{z}.$$

Еще к концу 30-х годов XVIII в. Эйлер разработал алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на понижении порядка некоторых однородных уравнений с помощью показательной функции. В 1743 г. в одной из работ Эйлера был опубликован метод решения линейного однородного дифференциального уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами при помощи подстановки

$$y = e^{kx},$$

а в случае кратных действительных корней характеристических уравнений — подстановки

$$y = ue^{kx}.$$

В случае наличия пары комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ подстановка того же типа

$$y = ue^{\alpha x}$$

сводит задачу к уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \beta^2 u = 0,$$

тригонометрический вид решения которого был известен Эйлеру еще с 1740 г.

Через несколько лет (в 1753 г.) для понижения порядка уравнения

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} = X.$$

Эйлер применил множитель e^{mx} . Затем он предположил, что решение нового уравнения имеет вид

$$e^{mx} \left(A_1 y + B_1 \frac{dy}{dx} \right) = \int X e^{mx} dx,$$

где A_1 и B_1 — неопределенные коэффициенты. Эти коэффициенты, а также m , он нашел дифференцированием обоих членов этого уравнения и почленным сравнением.

Даламбер (в 1766 г.) нашел, что общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Многие ученые (в особенности Клеро и Эйлер) интенсивно разрабатывали метод интегрирующего множителя. Помимо отыскивания специальных видов интегрирующего множителя для отдельных классов уравнений были поставлены более общие задачи. Так, в 1768—1769 гг. Эйлер исследовал классы дифференциальных уравнений первого порядка, обладающих интегрирующим множителем данного типа, и делал попытки распространить эти исследования на уравнения высших порядков.

По инициативе Эйлера в 30-х годах сложилось и окрепло убеждение, что для интегрирования дифференциальных уравнений даже простых, казалось бы, классов, множества элементарных функций и простейших трансцендентностей недостаточно. В этих целях внутри теории дифференциальных уравнений приходилось ограничиваться тем, чтобы выразить решения в квадратурах; методы же вычисления интегралов, получающихся при этом, были вынесены в собственно интегральное исчисление.

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями были найдены решения отдельных уравнений с частными производными. Уже около 1735 г. Эйлер, занимаясь различными задачами о траекториях, пришел к «модулярным», или «параметрическим», уравнениям

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y),$$

а также

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y, z),$$

называемым так потому, что речь идет о семействе кривых, в уравнения которых входит переменный параметр, или, по

терминологии того времени, модуль. Применение интегрирующего множителя R ко второму уравнению дало Эйлеру условие интегрируемости в виде

$$\frac{\partial R}{\partial x} = F \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial F}{\partial z},$$

откуда он нашел выражение для интегрирующего множителя

$$\ln R = \int \frac{\partial F}{\partial z} dx.$$

Несколько дифференциальных уравнений с частными производными решил Даламбер, в том числе уравнение колеблющейся струны, о котором речь шла выше.

Таким образом, в области решения дифференциальных уравнений в первой половине XVIII в. работа состояла в решении отдельных специфических уравнений. В этот период были выработаны предпосылки для создания первых форм общей теории, в том числе ряд основных понятий.

В 1743 г. появились понятия частного и общего интегралов, найденные Эйлером еще в 1739 г. Они были опубликованы в мемуаре, где речь идет об едином алгоритме решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. В работах этих лет Эйлер рассмотрел и особые решения ряда дифференциальных уравнений, которые были известны еще из «Methodus incrementorum-etc» Тейлора (1715).

Тейлор обнаружил особое решение, рассматривая уравнение

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz} \right)^2. \quad (1)$$

Подстановками

$$x = \frac{v}{y^2}, \quad v = 1 + z^2$$

он преобразовал (1) в уравнение

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1. \quad (2)$$

Продифференцировав

$$2y''(vy' - zy) = 0,$$

а затем приравняв

$$vy' - zy = 0$$

и подставив в уравнение (2)

$$y' = \frac{zy}{v},$$

Тейлор получил

$$y^2 = v, \quad x = 1,$$

которое он назвал «некоторым особым решением задачи».

Неразъясненность этого вида решения, не содержащегося в общем решении, побудившая Тейлора назвать его «особым», сохранилась в сочинениях Клеро, рассматривавшего (в 1736 г.) особое решение уравнения

$$y = (x + 1) \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

Эйлер, однако, уже в 1736 г. обнаружил, что если найден интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ дифференциального уравнения, то $\frac{1}{\mu} = 0$ может дать особое решение. Например,

$$x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} dy$$

имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},$$

а особое решение будет

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Лишь в 1774—1776 гг. Лагранж сумел детально выяснить, как получать особые решения: либо непосредственно из дифференциального уравнения, либо из общего решения дифференцированием по постоянной. Он же дал геометрическую интерпретацию особого решения как огибающей семейства интегральных кривых. Систематическое и единое изложение всех сведений об особых решениях обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранж дал в 1801 г. в «Лекциях об исчислении функций».

Возвратившись к общей характеристике положения дел, мы можем заметить, что практические успехи, достигнутые крупнейшими учеными XVIII в. в решении дифференциальных уравнений, оказались в 60-х годах настолько значительными, что создалась объективная возможность для построения общей теории дифференциальных уравнений.

Эта общая теория была изложена впервые Эйлером в его знаменитом сочинении: «Интегральное исчисление». Оно, как мы уже указывали, состоит из трех томов, вышедших в свет последовательно в 1768, 1769 и 1770 гг., и завершает серию книг Эйлера, посвященных систематическому построению современного ему анализа и его приложений. Теория дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными — составляет основное содержание этого труда. Ему предшествует лишь интегрирование функций, занявшее первую половину первого тома. За ним следует только вариационное исчисление, составляющее приложение к третьему тому.

Дифференциальные уравнения в эти годы находились в стадии самой энергичной разработки и поисков методов решения новых и новых типов уравнений. Эйлер впервые в «Интегральном исчислении» дал строгую и четкую классификацию всех известных уравнений и систематически изложил способы их решения вплоть до самых современных, «не так давно найденных», по его выражению, результатов. Огромное количество последних найдено самим Эйлером. Таким образом, теория строилась как совокупность методов решения уравнений, а эти последние рассматривались в связи с физической задачей, породившей их. При таком состоянии теории дифференциальных уравнений еще не появилась потребность в постановке задач о теоремах существования и единственности, столь характерных для более позднего периода.

По-видимому, не представляется целесообразным описывать содержание всего этого огромного труда Эйлера, изобилующего практически трудно обозримым на ограниченном числе страниц множеством конкретных методов и результатов. Кроме того, это сочинение издано полностью в переводе на русский язык. Поэтому перейдем к характеристике основных направлений в теории дифференциальных уравнений, сложившихся во второй половине XVIII в.

Более отчетливо эти основные направления проявились в области обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти направления порождены, как правило, потребностями решения прикладной задачи или группы их. Вокруг них концентрировались наибольшие усилия и наибольшее количество работ.

Первое из направлений состояло в развитии теории линейных дифференциальных уравнений, главным образом второго порядка, и их систем как с постоянными, так и с

переменными коэффициентами. К такого рода уравнениям приводили задачи о малых колебаниях материальных точек и их систем с конечным числом степеней свободы. Примером подобных задач являются задачи, связанные с конструированием маятниковых часов и применением маятниковых аппаратов для гравиметрических исследований. К этому классу относятся и задачи о колебательных движениях часовых пружин, вставшие тотчас, как была выяснена ограниченность применения маятниковых часов. Переход от колебаний точки к колебаниям систем последних повлек за собой расширение задачи на случай бесконечного числа степеней свободы: колебаний столба воздуха, струны и т. п.

Проблемы аналитической динамики точки и системы точек выдвинули в качестве другого главного направления теории дифференциальных уравнений развитие методов решения нелинейных уравнений первого и второго порядка и их систем. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки выражается нелинейной системой трех уравнений второго порядка относительно $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ — так называемых углов Эйлера, выраженных в функциях от времени. Движение центра тяжести планеты в солнечной системе выражается решением квазилинейной системы

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + R^2 \frac{x_i}{\left(\sum_i x_i^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad k = \text{const}).$$

Квазилинейными в общем случае оказываются и уравнения Эйлера, появляющиеся в вариационном исчислении при решении задачи об экстремуме функционала

$$\int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Нелинейное уравнение второго порядка получается, в частности, в задаче о нахождении геодезических на поверхностях. К уравнениям того же вида приводились решения уравнений движения точки в сопротивляющейся среде.

Сложность проблемы решения уравнений и невозможность сплошь и рядом интегрировать их в конечном виде послужили основной причиной возникновения третьего большого направления. Речь идет о разработке приближенных методов решения дифференциальных уравнений. Классиче-

ский метод ломаных, ныне широко применяющийся в теоремах о существовании и единственности решения уравнения,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с начальными условиями $x=x_0$, $y=y_0$ был найден и опубликован в 1768 г. Эйлером. Задачи небесной механики, поставленные с учетом возмущающих сил, явились первым объектом применения методов приближенного интегрирования. Учитывая сравнительную малость эксцентриситетов орбит планет и возмущающих сил, решение задается в первом приближении в виде круговой орбиты, которая затем исправляется.

Геометрические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, выделившиеся в особую область математики — дифференциальную геометрию, оставили свой след и в теории самих уравнений. Теория особых решений составила заметное направление в общей теории дифференциальных уравнений. Изучение семейств интегральных кривых и решение задач о нахождении огибающих и изогональных траекторий, перенесение результатов на семейства поверхностей — таков путь исследований в этом, четвертом, направлении. Его значение возросло, когда в качестве первоочередных встали проблемы существования и единственности решения дифференциальных уравнений.

Исследования в области создания теории дифференциальных уравнений в частных производных, несмотря на свою многочисленность, не давали еще возможности столь четко выделить основные направления. Задача была еще слишком сложной. И хотя к дифференциальным уравнениям в частных производных было сведено большое число задач физики, механики и теории поверхностей, решение их продвигалось медленно.

Систематическая работа в этом направлении начала развертываться лишь в 60-х годах. Начало ей положил Эйлер. Ему же принадлежит первая монография, где сделана попытка построения теории дифференциальных уравнений с частными производными. Речь идет о третьем томе «Интегрального исчисления», вышедшем в 1770 г. Наряду с Эйлером теорию уравнений с частными производными разрабатывали Даламбер, Лагранж, Лаплас, Монж и многие другие ученые.

Одной из главных идей, сравнительно быстро утвердившихся в теории уравнений первого порядка, была идея све-

дения их интегрирования к интегрированию обыкновенных уравнений или их систем. Ее использовал Даламбер (1768) при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Аналогичные методы развивал Эйлер. Метод сведения общего линейного дифференциального уравнения

$$Pp + Qq = R$$

к интегрированию системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

разработанный в 1776 г. Лапласом и Лагранжем, поныне входит в учебники. Когда несколько позднее (в 1781, 1787 гг.) Лагранж распространил этот метод на линейные уравнения с любым числом переменных, он открыто высказал, что решение уравнений с частными производными зависит от искусства сведения их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В решении нелинейных уравнений первого порядка Эйлер (1770) показал, что дифференциальное уравнение с тремя переменными всегда можно привести к линейному уравнению с четырьмя переменными. Этот результат был развит в работах Лагранжа (1774), Монжа (1787), Шарпи (1784). Последний довел до конца решение нелинейного уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными. Идея метода состояла в том, что к уравнению

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

подбирают другое уравнение,

$$u(x, y, z, p, q) = a,$$

так, чтобы эта система из двух уравнений была вполне интегрируема. Определяемые из системы уравнений функции

$$p = p(x, y, z, a), \quad q = q(x, y, z, a)$$

приводят, как мы теперь знаем, к уравнению Пфаффа

$$dz = p(x, y, z, a) dx + q(x, y, z, a) dy.$$

Интеграл этого уравнения

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,$$

где a и b — произвольные постоянные, будет полным интегралом уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Об этом методе, который до сих пор продолжает входить в монографии по дифференциальным уравнениям, стало известно, однако, лишь в 1814 г. О нем сообщил французский академик Лакруа, так как Шарпи вскоре после представления своего мемуара в Парижскую академию скончался. Шарпи не мог распространить свой метод на уравнения с большим числом переменных. Эта трудность была преодолена в XIX в. в трудах К. Якоби и Пфаффа.

В ходе разработки методов решения дифференциальных уравнений первого порядка выяснились виды их решений, взаимоотношения между ними и введена терминология, сохранившаяся до настоящего времени. Итоги этого процесса подвел Лагранж в работах 1774 и 1776 гг. Так, решение, зависящее от двух произвольных постоянных, получило название полного. Если в полном решении

$$z = \varphi(x, y, a, b)$$

положить

$$b = \psi(a),$$

где $\psi(a)$ — произвольная функция, а из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, \psi(a)) \text{ и } \frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

исключить a , то получится решение, названное общим. Наконец, исключение a и b из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, b), \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

давало решение, получившее название специального, а затем особого. Так как решение дифференциальных уравнений не всегда сводится к квадратурам, то Лагранж был вправе ввести разные термины: решение уравнения и его интеграл.

Наряду с аналитически-вычислительными методами решения уравнений развивалась и геометрическая теория их решений. Вообще, теория дифференциальных уравнений с частными производными оказалась тесно связанной с задачами и понятиями геометрии (теории поверхностей и пространственных кривых). Это направление было развито в серии

великолепных работ Г. Монжа. Эту группу вопросов мы рассмотрим в главе V, посвященной развитию геометрии в XVIII в.

Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка возникали преимущественно в ходе решения физических задач. Из них прежде всего следует указать на задачу о колебании струны, приведенную к уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

о чем говорилось в предыдущей главе. Около 1760 г. Эйлер, разрабатывая проблемы гидродинамики, вывел уравнение объемного расширения жидкости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Для этого уравнения Эйлер нашел частное решение, а в одном случае (когда движение совершается по направлению к неподвижному центру, а скорости на поверхностях соответствующих сфер одинаковы) — общий интеграл. Задачу о колебании мембран Эйлер в 60-х годах XVIII в. свел к уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Его решение он нашел в виде ряда для трансцендентной функции, которую мы теперь называем цилиндрической, или (что совсем не обосновано) бесселевой, по фамилии немецкого астронома Ф. В. Бесселя.

Задачи о колебании газа в трубах различных профилей, теории потенциала и др. приводили также к уравнениям второго порядка. Дифференциальные уравнения с частными производными составили особый многочисленный класс уравнений XVIII в.

Что касается уравнений более высокого порядка, то они имели эпизодический характер.

Исследования уравнений второго порядка были многочисленными, но создание общей теории сталкивалось с непреодолимыми в то время затруднениями. Первые успехи наметились к 1770 г., когда Эйлер применил преобразования линейных дифференциальных уравнений второго порядка к каноническим формам. Например, уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

подстановками

$$t = x + ay, \quad u = x - ay$$

приводится к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$z = f(t) + \varphi(u) = f(x + ay) + \varphi(x - ay).$$

Таким путем было начато выделение канонических типов дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Общее линейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0,$$

где коэффициенты и свободный член являются некоторыми функциями от x и y , рассматривал Лаплас (1777), создавший для его решения единый метод, получивший название метода каскадов.

Сущность этого метода, как и для общего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + \psi(x, y, z) = 0,$$

которое решал Лаплас, состоит в замене переменных. Введя две новые переменные s и s_1 , Лаплас приходит к уравнению, носящему ныне его имя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_1} + m \frac{\partial u}{\partial s} + n \frac{\partial u}{\partial s_1} + lu + T = 0,$$

или, кратко, $D(u) = 0$.

Если $\varphi(s)$ и $\psi(s_1)$ — две произвольные функции и если составить

$$\varphi_1(s) = \int \varphi(s) ds, \quad \varphi_2(s) = \int \varphi_1(s) ds, \dots$$

$$\psi_1(s_1) = \int \psi(s_1) ds_1, \quad \psi_2(s_1) = \int \psi_1(s_1) ds_1, \dots$$

то решение можно записать в виде ряда

$$u = A_0 \varphi_1(s) + A_1 \varphi_2(s) + A_2 \varphi_3(s) + \dots + \\ + B_0 \psi_1(s_1) + B_1 \psi_2(s_1) + B_2 \psi_3(s_1) + \dots$$

Подстановка этого выражения в уравнение $D(u)=0$ даст для определения коэффициентов $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial s_1} + mA_0 &= 0; & \frac{\partial B_0}{\partial s} + nB_0 &= 0; \\ \frac{\partial A_1}{\partial s_1} + mA_1 + D(A_0) &= 0; & \frac{\partial B_1}{\partial s} + nB_1 + D(B_0) &= 0; \\ \frac{\partial A_2}{\partial s_1} + mA_2 + D(A_1) &= 0; & \frac{\partial B_2}{\partial s} + nB_2 + D(B_1) &= 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

Если ряд для u обрывается, т. е. для некоторого k будет иметь место $A_k=0, B_k=0$, то общий интеграл выражается в конечном виде. Если же это не имеет места, Лаплас представляет решение не рядом, а с помощью определенных интегралов. Он показал, что в этом случае

$$u = \int_0^s p \varphi(z) dz + \int_0^{s_1} p_1 \psi(z) dz,$$

где p и p_1 — частные интегралы $D(u)=0$

$$p = \int_0^s \Gamma(s-z) \varphi(z) dz, \quad p_1 = \int_0^{s_1} \Pi(s-z) \psi(z) dz,$$

а в этих интегралах

$$\begin{aligned} \Gamma(s-z) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1} \frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!}; \\ \Pi(s-z) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_{k-1} \frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Лаплас показал, что его метод является более общим, чем все другие. В случае, например, когда l, m, n — постоянные в уравнении $D(u)=0$,

$$T=0, \quad m = \frac{f}{s+s_1}, \quad n = \frac{g}{s+s_1}, \quad l = \frac{h}{s+s_1},$$

получается частный случай интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Дальнейшие

усовершенствования, внесенные в метод каскадов Лагранжем и Лапласом, привели этот метод к современному виду.

Подведем итоги. Аппарат математического анализа в течение XVIII в. развился необычайно быстро, приняв формы и объем, близкие к современному. Дифференцирование, а также интегрирование в элементарных функциях по существу были в основном завершены. Важнейшей частью математического анализа в его оперативно-алгоритмической трактовке постепенно сделались дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и с частными производными. Вместе с разработкой методов решения отдельных классов уравнений формировались элементы общей теории.

В области обыкновенных дифференциальных уравнений были выявлены основные их типы, поддающиеся решению в квадратурах, найдены приемы приближенного их решения. Сформулированы и сделались общепринятыми понятия общего и особого решения. В части дифференциальных уравнений с частными производными проведены частичная классификация и выделение канонических типов, а также накоплено множество частных приемов решения.

Однако теория дифференциальных уравнений не могла долго развиваться как совокупность частных приемов, пригодных для решения немногочисленных классов уравнений. Накопление этих приемов необходимо, но недостаточно для построения общей теории. Перед математиками все более остро вставала проблема существования решения и установления его характера. Решения образовывали класс функций, неизмеримо более широкий, чем класс первообразных от элементарных функций. Практические успехи теории дифференциальных уравнений и ее многообразные связи с теорией функций комплексного переменного, специальными функциями, вариационным исчислением, и особенно с задачами математической физики, делали проблему создания общей теории особенно настоятельной.

В заключение главы приведем схему интегрального исчисления в XVIII в. для облегчения понимания его сложной структуры и процесса отпочкования от него различных дисциплин. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными приведена в соответствие со структурой третьего тома «Интегрального исчисления» Эйлера. В схему включено как часть интегрального исчисления и вариационное исчисление; истории этого исчисления посвящена следующая глава книги.

ГЛАВА IV

СОЗДАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление является одним из актуальных отделов современного математического анализа. Входя в качестве составной части в функциональный анализ, оно тесно связано со многими математическими науками. Вариационные методы проникают в различные области математики, механики, физики, техники, создавая всякий раз возможности непосредственных приложений. Вариационное исчисление продолжает обогащать свое содержание за счет связанных с ним наук.

Вариационное исчисление возникло в XVIII в. В трудах Эйлера, а затем Лагранжа и Эйлера оно получило вид стройной математической теории. Последняя тотчас доказала свою полезность, так как методами этой теории оказалось возможным решить большое число задач практического характера. Возникновение вариационного исчисления и его выделение в самостоятельную математическую дисциплину, разрабатывающую общие методы определения экстремумов функционалов, были обусловлены необходимостью решения особого класса геометрических, механических и физических экстремальных задач практического характера. За задачами этого класса установилось название вариационных задач.

Вариационные задачи. В истории математики задачи этого типа были поставлены и подвергались исследованию очень давно. Примерами могут служить античная теория изопериметров и многочисленные высказывания экстремального характера в физике (механике и оптике). Однако мы их не будем здесь рассматривать, так как способы решения этих

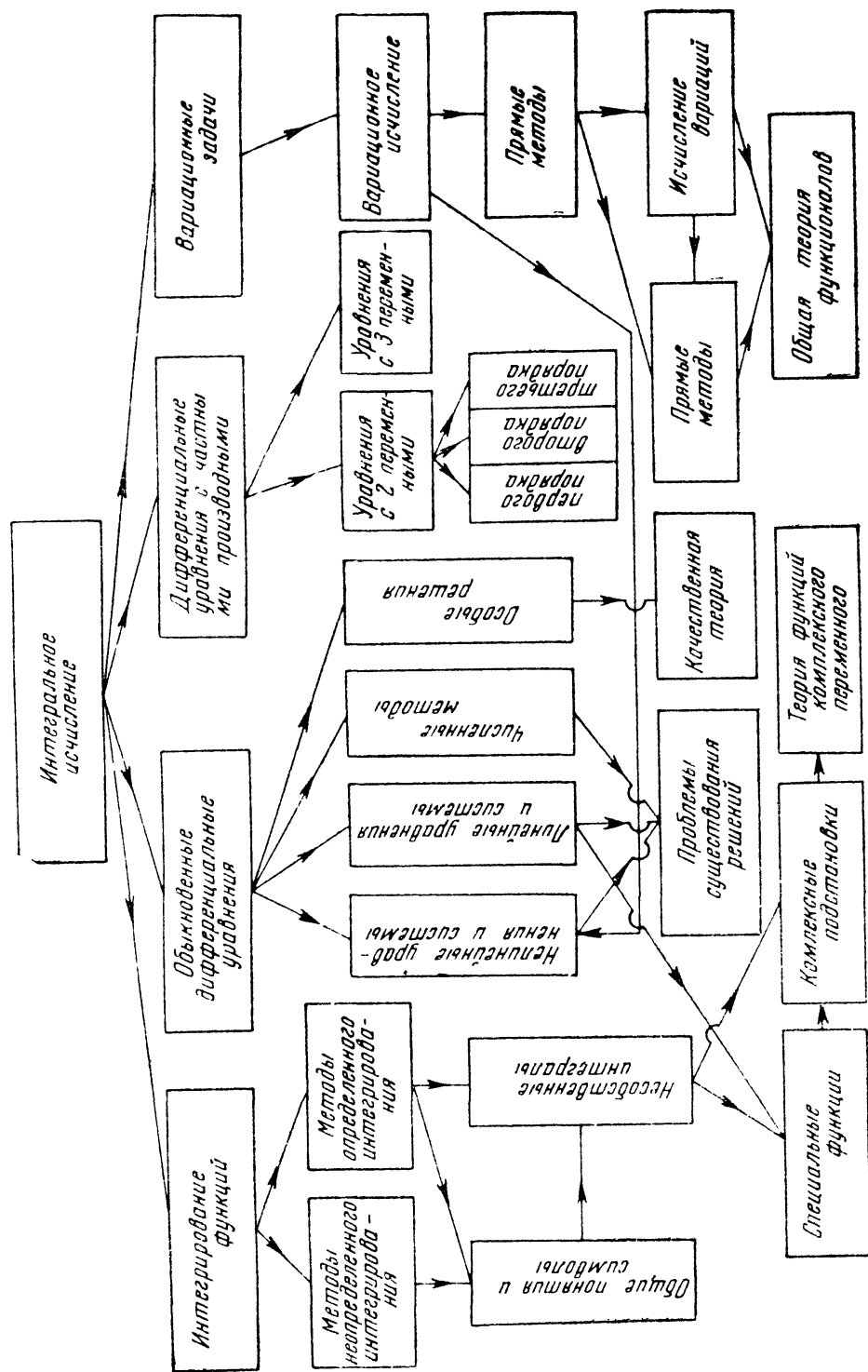


Рис. 2

экстремальных задач были еще индивидуальными и по существу специального исчисления составить не могли. К концу XVIII в. сложилась совсем иная обстановка. Накопились и были выделены в отдельный класс экстремальные задачи особого рода, не поддающиеся решению средствами только что возникшего анализа бесконечно малых. Это была, во-первых, задача Ньютона, поставленная и решенная им в «Математических началах натуральной философии» (1687). В ней требовалось найти кривую, проходящую через две данные точки и такую, чтобы она при вращении вокруг данной оси образовывала тело вращения, испытывающее наименьшее сопротивление при движении вдоль оси. Другими вариационными задачами оказались: задача о брахистохроне (1696) — кривой, по которой осуществляется быстрейший спуск материальной точки из одной точки пространства в другую; изопериметрическая задача (1697); задача о геодезических линиях на поверхностях (1697). По существу разработке были подвергнуты, уже в то раннее время, все основные типы вариационных задач.

Решения указанных задач были постепенно найдены в конце XVII—начале XVIII в. Ньютон для высказанной им задачи дал эквивалент дифференциального уравнения в форме геометрической пропорции. Задача о брахистохроне была решена И. Бернулли, а затем Ньютоном, Лейбницем и Я. Бернулли. Изопериметрическая задача и задача о геодезических были решены также одновременно несколькими учеными. Методы решения были недостаточно общими, специальными, но в них все яснее проявлялись общие черты. Создавались возможности для выработки общего метода.

Создание вариационного исчисления. Прямой метод Эйлера. Общий метод решения вариационных задач былработан в серии работ Эйлера в 1726—1744 гг. Вначале он, рассмотрев методы решения задачи о брахистохроне, поставил (1726) эту же задачу в условиях сопротивления, оказываемого средой. Затем (1728) он вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности. Малая общность и недостаточность приемов, применяемых при решении задач уже осознанного в своем своеобразии класса, не удовлетворяли Эйлера. Он предпринял поиски общего метода и к 1732 г. отыскал его. В соответствующей статье Эйлера «Общее решение изопериметрической задачи, поставленной в самом широком смысле» мы находим первую общую постановку одномерной вариационной задачи.

Эта работа Эйлера интересна в особенности тем, что она

знаменует начало характерного для развития математических исчислений диалектического переворота, когда решения отдельных задач начинают рассматриваться как приложения общего метода. Последний же делается предметом исчисления.

Эйлер классифицирует задачи, где отыскиваются, по его выражению, кривые, обладающие экстремальным свойством. При этом в качестве экстремального избрано свойство интегралов частных видов, взятых вдоль кривой, принимать максимальные или минимальные значения. Классификация Эйлера такова: а) из всех вообще кривых определить ту, которая обладает экстремальным свойством A ; б) из семейства кривых, обладающих общим свойством A , выбрать экстремаль относительно свойства B ; в) из совокупности кривых, обладающих двумя свойствами A и B , выделить экстремаль относительно свойства C и т. д.

Свойствами, или, как мы теперь говорим, функционалами, у Эйлера являются интегралы. Почти все они имеют вид

$$\int f(x, y, y') dx.$$

Метод опирается на: а) идею сохранения экстремального значения свойства, когда элемент экстремали заменен элементом другой близкой кривой, б) принцип Лейбница—Я. Бернулли, что экстремаль сохраняет свои экстремальные свойства в любой своей части. Метод состоит в варьировании одной, двух и т. д. (в зависимости от вида задачи) ординат и в приравнении значений свойств соответствующего элемента экстремали до и после варьирования.

Через четыре года (в 1736 г., опубликовано в 1741 г.) Эйлер обобщил этот метод на интегралы вида

$$\int_a^b Q(x, y, s, y', y'') dx,$$

где

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Наконец, к 1744 г. метод Эйлера приобрел столь большую общность, что перерос в специальное исчисление, систематически изложенное Эйлером в книге «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или миниму-

ма, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» — первой в истории книге по вариационному исчислению.

Постановка задачи в руках Эйлера обернулась. Вместо стремления решить еще одну трудную вариационную задачу или целый их класс Эйлер выдвинул общий метод, применяющийся затем к решению различных видов таких задач. Этот метод, который Эйлер называл «методом максимумов и минимумов в применении к кривым линиям», имеет своей первоначальной, самой общей целью отыскание кривых линий, для которых какая-либо наперед заданная величина достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Рассмотрим этот метод по существу.

Сформулированная только что задача еще поставлена недостаточно определенно. Эйлер вводит следующие условия определенности: а) задача ставится и решается для одного и того же отрезка оси абсцисс; б) вводятся два вида экстремумов: абсолютный и относительный; в) определяется вид функционала как «неопределенной интегральной величины»

$$w = \int_{x_0}^x Z(x, y, y', y'', \dots) dx.$$

Идеи, положенные Эйлером в основу абсолютного метода максимумов и минимумов, сравнительно просты. Пусть необходимо среди всех возможных кривых на отрезке $[x_0, x]$ выбрать такую $f(x, y) = 0$, чтобы интеграл

$$w = \int_{x_0}^x Z dx$$

принимал экстремальное значение. Всякую кривую $y = y(x)$, определенную в некоторой области значений $x_0 \leq x \leq x_1$, Эйлер заменяет полигоном, абсциссы вершин которого выбираются на оси Ox на равных расстояниях друг от друга. Это, по мысли Эйлера, давало возможность с любой степенью точности аппроксимировать кривую.

«Интегральную формулу максимума и минимума»

$$I = \int_{x_0}^x Z(x, y, y', y'', \dots) dx$$

он заменяет суммой вида

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i, y, y', y'', \dots) dx,$$

где

$$dx = \frac{x - x_0}{n}, \quad x_i = x_{i-1} + dx,$$

а y_i — ординаты в фиксированных точках x_i . Кроме того, заменяя производные отношениями конечных разностей:

$$y'_i = p_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}; \quad y''_i = q_i = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{dx} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{dx^2}, \dots$$

Эйлер добивается возможности рассматривать значение формулы максимума или минимума для данной кривой как функции ординат:

$$I = F(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

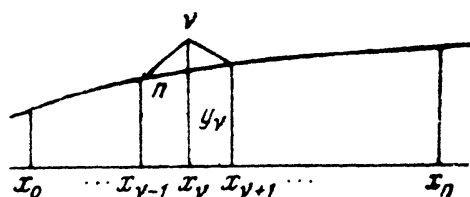


Рис. 3

Затем решается обычная экстремальная задача: варьируется некоторая произвольная ордината y_v ; разность значений I , соответствующих неизменной и варьированной кривой, приравняется нулю. Тем самым получается дифферен-

циальное уравнение экстремали.

Таким образом, Эйлер сводил решение вариационной задачи к решению другой — об экстремуме функции многих переменных (ординат). Этот метод в руках Эйлера сделался универсальным для любого типа вариационных задач и являлся основным для вариационного исчисления в созданной первоначально Эйлером форме.

Пусть для простоты $z = z(x, y, y')$. Тогда

$$\int Z(x, y, y') dx$$

заменяется на

$$\sum_{i=0}^{n-1} Z\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}\right) dx.$$

Ордината y_v испытывает приращение на ν . Тогда в указанной сумме изменятся только члены, содержащие y_v . Это

$$Z\left(x_{v-1}, y_{v-1}, \frac{y_v - y_{v-1}}{dx}\right) dx \quad \text{и} \quad Z\left(x_v, y_v, \frac{y_{v+1} - y_v}{dx}\right) dx.$$

Чтобы вычислить их приращения, Эйлер дифференцировал Z по x , y , p и заменял дифференциалы dx_i , dy_i , dp_i приращениями соответствующих величин x_i , y_i , p_i .

$$dZ(x_{v-1}, y_{v-1}, p_{v-1}) = M dx_{v-1} + N dy_{v-1} + P dp_{v-1},$$

$$dZ(x_v, y_v, p_v) = M' dx_v + N' dy_v + P' dp_v.$$

Так как приращение получает лишь y_v , то

$$dx_{v-1} = dx_v = dy_{v-1} = 0, \quad dy_v = +nv,$$

$$dp_{v-1} = +\frac{nv}{dx}, \quad dp_v = -\frac{nv}{dx}.$$

Следовательно, величина приращения

$$Z(x_{v-1}, y_{v-1}, p_{v-1}) dx + Z(x_v, y_v, p_v) dx$$

будет

$$Pnv + N'nv dx - P'nv.$$

Но, пишет Эйлер, « $P' - P = dP$, а вместо N' можно писать N ». Тогда

$$Pnv + Nnv dx - P'nv = 0$$

или

$$-dP + N dx = 0,$$

т. е.

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

что в привычных нам символах означает

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dZ}{dy'} \right) = 0$$

дифференциальное уравнение Эйлера.

Будучи распространен на случаи, в которых подынтегральное выражение зависит от производных более высокого порядка, этот метод приводит к уравнению вида

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots = 0.$$

При этом Эйлер не останавливается перед возможностью неограниченного продолжения этого ряда. Он лишь отмечает,

что дифференциальное уравнение кривой всегда будет иметь порядок в два раза больший, чем формула максимума или минимума. Из этого замечания естественно вытекает условие, обеспечивающее определенность задачи: среди всех кривых, проходящих через $2n$ заданных точек, определить ту, для которой $\int Zdx$, где

$$Z = Z(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

был бы максимумом или минимумом.

Изложение метода, данное Эйлером, очевидно, не удовлетворяет требованиям современной научной строгости. В нем не обоснованы, в частности, вопросы законности перехода к пределу и перестановки предельных переходов. Не доказано

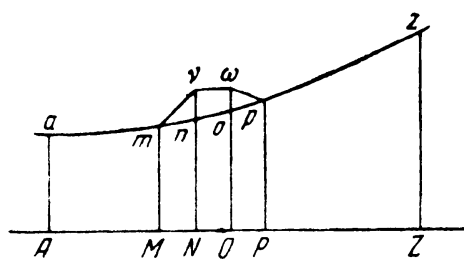


Рис. 4

также, дает ли предел экстремумов аппроксимирующих функций экстремум функционала. Однако необходимо помнить, что для Эйлера требования научной строгости в смысле, принятом в XX в., не могли и стоять. Кроме того, исследование указанных вопросов повело бы не только к отысканию

дифференциального уравнения экстремали, но и к аппроксимации решения этого уравнения решением системы обыкновенных уравнений, что выходило за пределы поставленной Эйлером задачи.

Метод Эйлера решения задач на относительный экстремум имеет целью отыскание экстремали не среди всех кривых, определяемых на данном участке оси абсцисс, но среди некоторого их семейства, каждая из кривых которого обладает одним или несколькими свойствами. Если дополнительное условие состоит в сохранении постоянного значения другого (или нескольких) функционала — интеграла, то получается обобщенная изопериметрическая задача. Эйлер приводит ее к задаче на вычисление абсолютного интеграла следующим образом.

Чтобы удовлетворить сразу двум условиям (если речь идет о кривых, обладающих одним общим свойством) — неизменности значения общего свойства B и формуле максимума или минимума A , — необходимо дать приращения не одной, а двум соседним ординатам. «Дифференциальные значения» обоих свойств будут иметь в силу изменения двух

ординат y_v и y_{v+1} (см. рис. 4 на стр. 83) на nv и $o\omega$ соответственно следующий вид:

$$dA_v \cdot nv + dA_{v+1} \cdot o\omega;$$

$$dB_v \cdot nv + dB_{v+1} \cdot o\omega.$$

Из заданных условий (экстремальности A и постоянства B) следует, что оба эти выражения должны быть приравнены нулю:

$$dA_v \cdot nv + dA_{v+1} \cdot o\omega = 0;$$

$$dB_v \cdot nv + dB_{v+1} \cdot o\omega = 0.$$

После исключения из этой системы двух уравнений nv и $o\omega$ Эйлер получал уравнение искомой кривой

$$\alpha dA + \beta dB = 0$$

($\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$). То же уравнение получается, если искать кривую, для которой выражение $\alpha A + \beta B$ достигает абсолютного экстремума.

Указанный метод Эйлер распространил и на еще более сложные случаи: а) подынтегральная функция Z в выражении функционала сама представляет собой функционал; б) эта подынтегральная функция задана посредством дифференциального уравнения, способ решения которого не известен. Такой, например, являлась у Эйлера задача о брахистохроне в сопротивляющейся среде. Как нашел Эйлер, здесь идет речь о нахождении максимума выражения

$$\int_0^l \frac{dx \sqrt{1+p^2}}{\sqrt{v}}$$

при условии

$$dv = g dx - hv^n dx \sqrt{1+p^2}.$$

При этом он правильно решил вопрос о границах применимости так называемого принципа Лейбница—Бернулли о наличии экстремального свойства в каждой точке экстремали.

В книге Эйлера приведено большое число примеров (свыше 60), иллюстрирующих широту возможностей нового метода. В них была продемонстрирована практическая ценность исчисления и установлены его тесные связи с механикой и физикой. Помимо тех недостатков, которые в XVIII в.

заметить было еще невозможно, у метода Эйлера существовал еще один: громоздкость. В течение нескольких последующих лет Эйлер упорно работал над отысканием удобного алгоритма.

Переход от прямых методов к исчислению вариаций. Положение дел начало изменяться с 1755 г., когда совсем еще юный преподаватель математики артиллерийской школы в г. Турине Лагранж сообщил Эйлеру об изобретенном им общем аналитическом методе вычисления вариации интеграла посредством интегрирования по частям. Этот метод основывался на введении вариации функции и на распространении на вариации правил дифференциального исчисления. Поясним эту мысль подробнее.

Чтобы сравнить значение интеграла $I(C)$ вдоль кривой C с его значениями вдоль соседних кривых, Лагранж изменял функции

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

определяющие кривую C , прибавляя к ним величины $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ — их вариации. Если вариации в крайних точках сегмента $[x_1, x_2]$, на котором рассматривается задача, обращаются в нуль, то образуются две кривые сравнения C и $C + \delta C$ с общими концами. Последняя из этих кривых будет задана функциями

$$y(x) + \delta y(x), \quad z(x) + \delta z(x).$$

Из всех возможных кривых сравнения теперь следует выбрать такую, чтобы для любых вариаций $\delta y(x)$, $\delta z(x)$

$$\Delta I = I(C + \delta C) - I(C) \geq 0.$$

Между вариациями $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ и приращением функционала в вариационном исчислении, с одной стороны, и дифференциалом независимой переменной dx и дифференциалом функции $y=f(x)$ в дифференциальном исчислении, с другой стороны, существует аналогия. Эту аналогию и обнаружил Лагранж. Она позволила ему применить в вариационном исчислении алгоритмы, аналогичные алгоритмам дифференциального исчисления, и доказать перестановочность символов d и δ , а также $\int$ и δ .

Эйлер, находившийся буквально на пороге подобного открытия, с энтузиазмом встретил сообщение молодого математика. Он поделился с ним своими идеями, а чтобы дать возможность Лагранжу первому опубликовать свои резуль-

таты (что произошло в 1762 г.), приостановил печатание своих статей на подобные темы. После 1762 г. Эйлер дал в ряде работ подробное, усовершенствованное и снабженное примерами изложение вариационного исчисления. Он же придумал название новому исчислению: вариационное. В одной из работ (1771) Эйлер дал вариационному исчислению новое истолкование. Оно теперь могло быть понято как метод выбора из однопараметрического семейства кривых такой кривой, которая реализует некоторое экстремальное свойство. Это толкование существенно сближает вариационное исчисление с дифференциальным исчислением. Однако оно еще не сделалось достаточно общим, так как в нем не рассматривались указанные еще Д. Бернулли случаи, когда бесконечно малые перемещения точки вдоль кривой сопровождаются конечными отклонениями касательных («сильные вариации»).

Конец XVIII в. ознаменовался серией исследований Эйлера, Лагранжа и других ученых. Вариационное исчисление при этом сравнительно быстро приняло завершенную форму в его наиболее элементарной части, относящейся к теории первой вариации. Рассматривался еще лишь слабый экстремум и, соответственно, лишь сравнительно гладкие кривые.

Главной задачей вариационного исчисления теперь как будто бы оказывалась проблема отыскания экстремумов функционалов возможно более широкого класса. Длинный ряд работ в XIX в. был посвящен именно этой теме. Однако наряду с этим кругом проблем оставалась нерешенной еще одна задача: как различить вид достигаемого экстремума. Относительно этой задачи еще Лагранж, опираясь, по-видимому, на аналогии с дифференциальным исчислением, указанные выше, отметил возможность применения второй вариации для решения этого вопроса.

В самом деле, пусть, например, задан функционал

$$I = \int_{x_0}^x F(x, y, y') dx.$$

Если

$$\delta I = 0, \quad \delta^2 I \neq 0,$$

то знак ΔI совпадает со знаком $\delta^2 I$ (при достаточно малых вариациях функций и их производных). В 1786 г. Лежандр (опубликовано в 1788 г.) смог привести вторую вариацию к виду, из которого явствовало, что ее знак зависит от зна-

ка $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$. Это привело его к так называемому условию Лежандра: чтобы на экстремали осуществлялся максимум (соответственно: минимум), необходимо, чтобы вдоль нее $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0$ (соответственно: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$). Это условие оказалось и достаточным для слабого экстремума, что было показано К. Якоби в 1837 г., при условии, что экстремаль может быть включена в поле экстремалей — в однопараметрическое семейство кривых, не пересекающихся между собой и заполняющих некоторую односвязную область.

Понятие поля экстремалей, введенное К. Якоби, оказалось необходимым для отыскания сильного экстремума функционала. Это нашло свое подтверждение в работах Вейерштрасса, который к 1879 г. разработал методы решения этой проблемы. Идея Вейерштрасса (с учетом последующих усовершенствований ее Д. Гильбертом) состояла в следующем: пусть дано поле экстремалей $y = y(x, \alpha)$. В него включена и искомая экстремаль. Введем функцию, выражающую зависимость углового коэффициента касательной к экстремали от координат точки касания $u(x, y)$, которую назовем наклоном поля. Приращение функционала имеет вид

$$\Delta I = \int_{(y)} \left[F(x, y, y') - F(x, y, u) - \frac{\partial F}{\partial u} (y' - u) \right] dx.$$

Подынтегральная функция широко известна в настоящее время как функция Вейерштрасса и имеет специальное обозначение $E(x, y, u, y')$. Знак этой функции указывает на вид экстремума: $E \geq 0$ в случае минимума и $E \leq 0$ в случае максимума. Если это условие рассматривается относительно слабого экстремума, то достаточно, чтобы указанное условие соблюдалось в точках поля, близких к экстремали, и для достаточно малой разности $|y' - u|$. В случае сильного экстремума условие Вейерштрасса должно выполняться, очевидно, для любых y' , а не только для y' , достаточно мало отличающихся от u .

Таким образом, в течение XIX столетия были найдены условия правомерности операций вариационного исчисления. Эти условия были распространены на широкие классы функционалов и снабжены строгими доказательствами. Выяснение достаточных условий для обеих разновидностей экстремумов, основанных на теории полей экстремалей, логически

завершило целый этап развития вариационного исчисления. Последнее формировалось как исчисление вариаций. Прямой метод Эйлера, казалось, был окончательно забыт.

О путях дальнейшего развития вариационного исчисления. Однако на рубеже XIX и XX вв. вариационное исчисление было вынуждено возродить прямые методы, вернувшись тем самым как бы к своей исходной точке. Еще М. В. Остроградский в 1834 г. показал, что задача вариационного исчисления об экстремуме кратных интегралов эквивалентна задаче решения некоторого дифференциального уравнения математической физики. В самом деле, если

$$I = \iint_G F(x, y, z, p, q) dx dy,$$

где

$$z = z(x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

то

$$\begin{aligned} \Delta I &= \iint_G [F(x, y, z + \delta z, p + \delta p, q + \delta q) - F(x, y, z, p, q)] dx dy = \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + R \right) dx dy. \end{aligned}$$

Необходимое условие экстремума

$$\delta I = \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q \right) dx dy = 0.$$

Преобразуя по формуле Остроградского двойной интеграл в криволинейный, можно получить

$$\iint_G \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \delta z dx dy = 0,$$

откуда, в предположении непрерывности подынтегральной функции, вытекает

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0.$$

Вариационная задача об экстремуме двойного интеграла оказывалась, таким образом, эквивалентной краевой задаче

для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка.

Например, гармоническая функция, являющаяся решением задачи о потенциале, задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

будет одновременно давать экстремум двойного интеграла

$$I = \iint \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

На это обстоятельство обращал внимание ряд ученых: Гаусс (1840), Томсон (1847) и, наконец, Дирихле. Возможности, вскрывающиеся в связи с открытием вышеотмеченной эквивалентности, были высоко оценены. Физический смысл этого явления в пространственном случае устанавливается легко: если u — потенциал скоростей в установившемся течении однородной несжимаемой жидкости, то соответствующее уравнение будет

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Искомое решение u_0 (среди всех функций, принимающих на границе области заданные значения) обращает в минимум

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

что соответствует минимуму кинетической энергии.

Риман, узнавший этот факт из лекций Дирихле, назвал его принципом Дирихле. Название сохранилось до наших дней. Выводы он распространил на введенные им и сохранившие его имя римановы поверхности. Для Римана является очевидным (по-видимому, из физических соображений), что для любой гармонической функции достаточно задать ее значение на границе области, чтобы иметь ее однозначную определенность внутри области.

Рассмотрим простейший случай краевой задачи Дирихле для однолистного круга. Пусть задана функция распределения краевых значений $u(\psi)$ — непрерывная функция угла. Задача сводится к установлению теоремы существования: внутри круга существует одна и только одна непрерывная функция u , непрерывно приближающаяся к заданным крайевым значениям и удовлетворяющая уравнению $\Delta u = 0$.

Введем

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

определенный на площади круга и имеющий смысл в любой его точке. Все значения этого интеграла конечны и, очевидно, неотрицательны. Тогда существует неотрицательная нижняя грань его значений для всех возможных u . Эта грань достигается при некотором u , т. е.

$$\delta \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Тогда уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

есть необходимое и достаточное условие обращения в нуль первой вариации.

Это рассуждение, поведшее к формированию в трудах Римана геометрической теории функций комплексного переменного, оказалось уязвимым в исходном пункте. Оказалось, что невозможно прийти к выводу о существовании гармонической функции, опираясь на вариационную задачу, так как можно привести примеры таких задач, которые не допускают никакого решения. Вейерштрасс еще при жизни Римана доказал, что из существования нижней грани указанного выше интеграла не следует, что эта грань достигается в классе допустимых функций. Знаменитый пример Вейерштрасса о том, что ломаная, соединяющая точки плоскости, меньше любой кривой, проходящей через эти точки, хотя к семейству этих кривых не принадлежит, вышел только в 1869 г., но был известен Риману. Последний не смог дать убедительного доказательства своим результатам, основанным на применении принципа Дирихле. Это удалось сделать его ученику Нейману (1884) и ученику Вейерштрасса Шварцу, которые в своих доказательствах не прибегали к вариационным методам.



Рис. 5

Таким образом выявилась разница между экстремальной проблемой в конечно-мерном точечном пространстве и в пространстве функциональном. В первом последовательность точек непременно допускает предельные точки. Во втором из последовательности функций не всегда удастся выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной

функции. Для преодоления подобных трудностей в вариационном исчислении понадобилось вновь разработать прямые методы.

Ведущая идея прямых методов современного вариационного исчисления заимствована еще от Эйлера. Она состоит в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для соответствующей задачи на экстремум функции конечного числа переменных. Последний разыскивается обычными методами, а последующий предельный переход дает решение вариационной задачи. Непосредственно к Эйлеру восходит конечно-разностный метод, который отличается от других прямых методов тем, что, например, функционал

$$v = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

рассматривается не на произвольных кривых (из числа допустимых в данной задаче), а на ломаных, составленных из заданного числа n прямолинейных отрезков с заданными абсциссами вершин:

$$a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, a + (n - 1)\Delta x, b,$$

$$\text{где } \Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Первых успехов в возрождении прямых методов достиг Гильберт, который в 1904 г., возвратившись к вопросу о принципе Дирихле, доказал существование решения в доказательстве Римана, построив последовательность функций, эффективно достигающую искомой функции. Затем вскоре Ритц (1908) разработал еще один широко известный теперь метод.

Идея метода Ритца заключается в том, что функционал V изучается на линейных комбинациях $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ с постоянными коэффициентами. При этом функционал превращается в функцию коэффициентов:

$$v = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Решая систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

получаем точки экстремума этой функции, а затем, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, — решение вариационной задачи. Ра-

зумеется, понадобятся условия относительно свойств функционала и полноты системы функций $u_1, u_2 \dots, u_n$.

В общей разработке прямых методов помимо работ Г. Вейля, Лебега и Куранта большое значение имели исследования советских ученых. Л. А. Люстерник, И. Г. Петровский, М. А. Лаврентьев, Н. Н. Боголюбов, Н. М. Крылов и др. обогатили вариационное исчисление высокоэффективными прямыми методами. Еще более велик вклад советских математиков в развитие качественных методов вариационного исчисления, получивших за последние 30—40 лет особое развитие. Это вполне закономерно, так как дифференциальные уравнения, к которым сводятся задачи вариационного исчисления, в конечном виде в большинстве случаев не решаются. Качественные же методы позволяют решать вопросы о существовании решений, об их числе, дать характеристику семейств экстремалей и т. п.

Вариационное исчисление в XX в. сделалось составной частью функционального анализа, той частью, в которой изучаются экстремумы функционалов. Кроме того, вариационные методы и принципы составляют важнейшую часть теоретической механики. С успехом применяются они в решении многочисленных задач прикладного характера.

Более чем двухсотлетняя история вариационного исчисления дает богатый материал для исследования общих закономерностей развития математических исчислений: их формирования, связанного с оборачиванием метода; трансформирования содержания, отражающего диалектичность развития, вхождения в более общие части математики, взаимосвязей с практикой и т. д.

ГЛАВА V

РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИИ В XVIII в.

Открытия принципиального значения, сделанные в геометрии в течение XVII в., предопределили для этой науки в следующем, XVIII, веке качественно новый этап развития. В составе геометрии появились новые дисциплины. Практически все классические области геометрии, исключая только неевклидовы геометрии, получили оформление в это столетие. Речь идет об аналитической, дифференциальной, начертательной и проективной геометриях, а также о работах по основаниям геометрии. Их общими чертами являются: развитие в рамках и на основе системы геометрии Евклида, непосредственное воздействие на эти области математики практических задач. Среди различных задач и методов геометрии наибольшее место и значение имели геометрические приложения анализа бесконечно малых. Из них возникла и развилась дифференциальная геометрия — наука, занимавшая в XVIII в. центральное место в системе геометрических дисциплин.

Аналитическая геометрия. Под таким названием общепринято понимать ту часть геометрии, где изучаются геометрические фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями. Для аналитической геометрии характерно использование методов алгебры и координатного метода.

Сочинения Декарта и Ферма открыли все возможности для развития аналитической геометрии еще в 30-х годах XVII в. Однако для претворения в жизнь очевидных (для нас) преимуществ аналитической геометрии даже в случае плоских задач потребовалось довольно много времени.

Прошло около столетия, пока средствами аналитической геометрии удалось получить достаточно результатов, чтобы превзойти достижения древних, в особенности Аполлония. В XVIII в. аналитическая геометрия еще переживала процесс становления, накапливания и исследования новых фактов.

Аналитическая геометрия Декарта и Ферма включала в себя лишь плоские задачи. Исследование кривых ранга выше первого (т. е. выше второго порядка) было в ней сравнительно редким явлением. Но даже этот скромный объем был труден для современников. В течение XVII в. появилось много сочинений, целью которых было комментировать новые методы. Однако подлинно новый шаг в развитии аналитической геометрии был сделан только в начале XVIII в. в результате выхода в свет в 1704 г. сочинения И. Ньютона «Перечисление кривых третьего порядка».

Ньютон отказался от декартовой классификации кривых по их родам¹. Он увидел, что классификация по степеням уравнений кривых лучше приспособлена для нужд аналитического аппарата новой геометрии. Порядок кривых в новой классификации получил геометрическую трактовку в виде возможного числа точек их пересечения с прямой. Затем Ньютон перенес на кривые третьего порядка ряд понятий и теорем, доказанных для конических сечений, соответственно видоизменяя их. Так, он ввел диаметры кривых как геометрические места точек ряда параллельных прямых, алгебраическая сумма расстояний которых от точек пересечения прямых с кривой равна нулю. В случае перпендикулярности диаметра к сопряженным хордам вводится ось кривой. Если все диаметры пересекаются в одной точке, то эта точка получает название общего центра. Соответственно распространяются многие другие понятия и теоремы.

Виды кривых определены Ньютоном с учетом конечных ветвей кривых, наличия или отсутствия диаметров, наличия и свойств бесконечных ветвей. Всего оказалось 72 вида кривых, каждому из которых Ньютон дал название. Эти виды кривых записываются уравнениями четырех типов. Если обозначить

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = A,$$

то указанные уравнения будут:

$$xy^2 + ey = A, \quad xy = A, \quad y^2 = A, \quad y = A.$$

¹ См. К. А. Рыбников. История математики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1960, стр. 133.

Сложная и громоздкая классификация заставила Ньютона сосредоточиться на особенностях кривых: узлах, точках заострения и т. п. Для облегчения этой трудной задачи Ньютон использует третье из указанных выше уравнений — уравнение полукубической параболы,

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

и показывает, что каждая кривая третьего порядка получается из нее посредством подходящего центрального проектирования. Такая проективная классификация, или, по выражению И. Ньютона, «органическое описание», приводит к выявлению всех проективно разных кривых третьего порядка, исходя из свойств корней уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Именно если три корня действительны и различны, то кривая состоит из двух различных ветвей; равенство всех трех корней свидетельствует о наличии точки возврата. Равенство двух корней укажет либо на двойную, либо на изолированную точку. Кривые, имеющие только одну ветвь, будут соответствовать наличию двух мнимых корней.

Мы не будем останавливаться больше на содержании этого сочинения. Оно слишком специфично. Принципы классификации кривых третьего порядка не оказались ни простыми, ни универсальными, результаты — недостаточно полными и не снабжены доказательствами. Значение настоящего сочинения Ньютона было не в этом. Ньютон раскрыл новые возможности для метода координат. К тому же последний был значительно усовершенствован Ньютоном, который ввел равноправные оси координат, определил знаки функций во всех четырех квадрантах, создал основы исследования свойств кривых по свойствам выражающих их уравнений. Эти возможности были подхвачены и развиты Стирлингом в книге «Ньютоновы кривые третьего порядка» (1717).

Стирлинг снабдил теоремы Ньютона доказательствами, а также вывел ряд теорем общего характера. Ему принадлежит, в частности, вывод канонической формы уравнений кривых третьего порядка путем выбора оси координат параллельно асимптоте, в силу чего степень уравнения понижается. Общими свойствами алгебраических кривых успешно занимался Маклорен (1720), который развил ньютонов органический способ образования кривых. Специальные мемуары на эту

тему издали Ф. Николь (1731), Мопертюи (1731), Брекенридж (1733) и др. Впоследствии кривым третьего порядка было посвящено огромное число работ Штейнера, Сальмона, Сильвестра, Шаля, Клебша и др.

Как было указано выше, аналитическая геометрия Декарта и Ферма не включала в себя методов решения пространственных задач. Оба автора сумели лишь дать общие указания о необходимости проектирования пространственных кривых на координатные плоскости. В течение почти столетия эта кажущаяся в наше время очевидной идея реализовалась лишь эпизодически, по частным поводам и не принимала общего характера.

Систематическое использование пространственных координат в аналитической геометрии начато в 1731 г. в книге Клеро «Исследования о кривых двоякой кривизны». Таким именем назывались пространственные кривые. Каждую точку последних Клеро проектировал ортогонально на две взаимно перпендикулярные координатные плоскости. Таким образом, пространственная кривая оказывалась заданной как геометрическое место пересечения двух цилиндрических поверхностей, а в аналитической форме она выражалась системой двух уравнений. Если же задано единственное уравнение, то Клеро правильно интерпретировал его как уравнение поверхности, приведя много примеров главным образом поверхностей вращения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{m}{n} x,$$

$$y^2 + z^2 = ax,$$

$$x^4 = a^2 (y^2 + z^2)$$

и т. п.

Работы Клеро создали возможность для систематического построения аналитической геометрии в форме, более или менее привычной для нас. Это осуществил Эйлер к 1748 г.

Аналитическая геометрия в первой половине XVIII в. формировалась в тесном сплетении с геометрическими приложениями математического анализа. Она уже играла роль фундамента большой области математических знаний, несмотря на незавершенность как по форме, так и по содержанию. Поэтому Эйлер, решая громадную задачу систематического построения математического анализа, осуществленную им в ряде монографий, выделил для аналитической геометрии специальный том («Введение в анализ...», т. 2). Значение этого

сочинения в истории аналитической геометрии необычайно велико. Охарактеризуем содержание этого тома подробнее.

В основной его части, состоящей из двадцати двух глав, излагается система аналитической геометрии на плоскости. В первой главе введены прямолинейные координаты, как прямоугольные, так и косоугольные, а также разъяснен способ записи уравнений кривых, дано понятие непрерывности кривых, как свойство кривой быть выраженной единым аналитическим выражением, в соответствии с понятием непрерывности функции, введенным в первом томе «Введения в анализ бесконечных». Вторая глава посвящена преобразованиям систем координат: повороту осей и переносу начала, а также анализу уравнения прямой в виде

$$\alpha x + \beta y - a = 0.$$

Следующие две главы относятся к классификации кривых по степеням их уравнений и выявлению общих свойств кривых. Еще две главы отведены специально исследованию кривых второго порядка. При этом в главе V речь идет о тех свойствах конических сечений, которые получаются из общего уравнения второй степени, а в главе VI подвергаются исследованию канонические формы уравнений кривых второго порядка. Бесконечные ветви и асимптоты конических сечений выделены для рассмотрения в главы VII и VIII.

Далее следует классификация кривых третьего порядка (главы IX и X). В соответствии с характером бесконечных ветвей эти кривые разделены на 16 видов. При этом Эйлер сравнил свою классификацию с той, которую дал Ньютон, и показал неполноту последней. Соответствующая классификация кривых четвертого порядка, сделанная в главе XI, дала уже 146 видов. Не продолжая этой делающейся бесперспективной работы, Эйлер перешел вновь к разработке общих методов исследования кривых по их уравнениям, дав краткие указания об этом в главе XII.

Касательные, являющиеся предметом тринадцатой главы, рассматриваются по отношению как к простым, так и кратным точкам кривых. В интересной главе XIV о кривизне кривых вначале определяется парабола; аппроксимирующая кривую в окрестности данной точки, а затем для этой параболы отыскивается круг кривизны. Длина радиуса кривизны кривой

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \dots$$

в начале координат находится по формуле

$$\frac{(A^2 + B^2) \sqrt{A^2 + B^2}}{2(A^2E - 2BD + B^2C)}.$$

Кроме того, Эйлер находит здесь же точки перегиба первого и более высоких порядков, точки заострения. Чтобы добиться наибольшей общности, он заменяет аппроксимирующую параболу более общими кривыми, например $ar^m = s^n$.

Глава XV отведена для исследования свойств диаметров кривых и симметрии последних, а две следующие (XVI и XVII) посвящены исследованию кривых по их свойствам. Речь идет о таких, например, задачах: исследовать кривую

$$y^2 - P(x)y + Q(x) = 0,$$

если известно, что для данного аргумента x кривая имеет две ординаты y_1 и y_2 , связанные между собой условием

$$y_1^n + y_2^n = a^n.$$

Другим условием является, например, то, что кривая имеет с данным лучом $y = ax$ данное число точек пересечения. Интересно, что при этом Эйлер вводит полярные координаты:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

В отдельной главе (XVIII) Эйлер собрал и систематизировал сведения о подобии и аффинных свойствах кривых. Кривые, по Эйлеру, называются аффинными, если их координаты связаны соотношениями

$$x = \frac{X}{m}, \quad y = \frac{Y}{n}.$$

Это понятие удержалось в математике до наших дней.

Наконец, в четырех завершающих главах рассматриваются: пересечения кривых (глава XIX), составление уравнений сложных кривых (глава XX), трансцендентные кривые (глава XXI) и геометрическое решение тригонометрических уравнений. Последние две главы появились, разумеется, в качестве геометрической трактовки функций, введенных в I томе «Введения в анализ». В них рассматриваются кривые тригонометрических функций, логарифмическая кривая, циклоиды всех трех видов, линия $x^y = y^x$ и различные спирали. Для исследования этих кривых используются как декартовы, так и полярные координаты.

Содержание этой книги, краткий обзор которой мы дали здесь, показывает, что аналитическая геометрия на плоскости превратилась в руках Эйлера в отдельную науку, предмет и методы которой уже определились в смысле и объеме, близком к современному. Однако Эйлер не ограничился двумерными задачами. Он проделал подобную работу также для аналитической геометрии в пространстве в специальном «Приложении о поверхностях» к той же книге.

Прежде всего, Эйлер (со ссылкой на Клеро) ввел пространственные прямоугольные декартовы координаты, рассматривая множество аппликат к координатной плоскости xOy . После введения знаков координат, замечаний о возможности замены осей, он рассмотрел ряд поверхностей и их сечений плоскостями. Было показано при этом, что уравнение

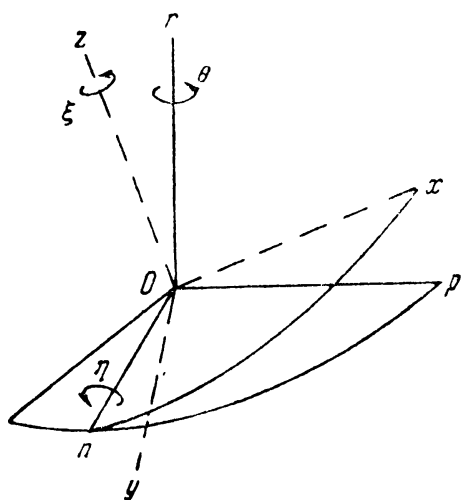


Рис 6

относительно двух переменных соответствует цилиндрической или призматической поверхности, а однородное уравнение — конусу или пирамиде. Вслед за этим он ввел более общие классы поверхностей: а) выраженных уравнением

$$F(x, y, Z(z)) = 0,$$

однородным относительно указанных аргументов. Этот класс включает конусы, цилиндры и поверхности вращения; б) имеющих треугольные сечения, перпендикулярные к осям; в) имеющих аффинные соотношения между параллельными сечениями и др.

Отправляясь от этих классов, он ввел метод сечений поверхностей произвольными плоскостями. Весь этот материал занял первые три главы приложения.

В главе IV выведены уравнения преобразования прямоугольных пространственных координат в виде

$$\begin{aligned} x &= \rho (\cos \zeta \cos \theta - \sin \zeta \cos \eta \sin \theta) + \\ &+ q (\cos \zeta \sin \theta + \sin \zeta \cos \eta \cos \theta) - r \sin \zeta \sin \eta + f; \\ y &= -\rho (\sin \zeta \cos \theta + \cos \zeta \cos \eta \sin \theta) - \\ &- q (\sin \zeta \sin \theta - \cos \zeta \cos \eta \cos \theta) - r \cos \zeta \sin \eta + g; \\ z &= -\rho \sin \eta \sin \theta + q \sin \eta \cos \theta + r \cos \eta + h. \end{aligned}$$

Углы ζ , η , θ называются и теперь углами Эйлера. Они определяют поворот осей. Угол прецессии θ есть угол вращения вокруг оси or ; при котором ось or переходит в прямую on — линию узлов, определяющую пересечение координатных плоскостей poq и $хоу$. Угол нутации η является углом вращения вокруг прямой on , при котором ось or переходит в oz . Наконец, угол собственного вращения ζ вокруг oz переводит on в $ох$.

В этой же главе введено понятие порядка поверхности, доказано, что порядок кривой в плоском сечении не превышает порядка поверхности, и рассмотрены случаи распада линий сечения.

Исследование общего уравнения второй степени относительно трех координат и приведение к каноническому виду, произведенное Эйлером в главе V, дало впервые уравнения всех видов невырожденных поверхностей второго порядка:

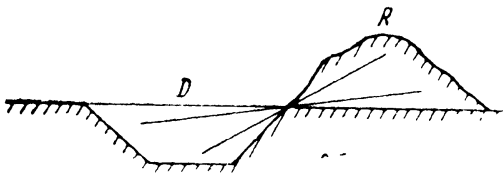


Рис. 7

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2 \text{ (эллипсоид),}$$

$$Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2 \text{ (однополостный гиперболоид).}$$

$$Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 = a^2 \text{ (двуполостный гиперболоид).}$$

$$Ap^2 + Bq^2 = ar \text{ (эллиптический параболоид),}$$

$$Ap^2 - Bq^2 = ar \text{ (гиперболический параболоид).}$$

Завершением книги служит рассмотрение пространственных кривых как пересечений двух поверхностей и выработка аналитического аппарата для их исследования.

Вторая половина XVIII в. принесла аналитической геометрии только частичные, хотя временами весьма существенные, усовершенствования. В основном аналитическая геометрия уже сформировалась. Упомянем лишь о нескольких наиболее значительных вкладах. В связи с дифференциально-геометрическими исследованиями о разворачивании поверхностей Монж в 1771 г. (опубликовано в 1785 г.) решил ряд задач аналитической геометрии. Так, он нашел условие перпендикулярности плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) .

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

и прямой

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

Затем Монж определил длину перпендикуляра, опущенного из данной точки пространства на данную прямую. Наконец, ему удалось определить нормальную плоскость к любой точке кривой двойкой кривизны: $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

Лагранж в статье 1773 г. (опубликовано в 1775 г.) исследовал, не прибегая к чертежу, средствами аналитической геометрии, задачи, относящиеся к трехгранной пирамиде. Полностью завершил вопрос о преобразовании пространственных координат Менье (1785), выведя формулы:

$$z' - z = t \cos \omega + u \sin \omega;$$

$$x' - x = [v \cos \omega - t \sin \omega] \sin \pi + u \cos \pi;$$

$$y' - y = [v \cos \omega - t \sin \omega] \cos \pi - u \sin \pi,$$

где u , v , t — старые координаты, x' , y' , z' — новые, x , y , z — новые координаты старого начала координат. Угол старой координатной плоскости xoy с новой обозначен здесь π , а угол линии пересечения обеих плоскостей с новой осью y есть ω .

Во второй половине XVIII в. аналитическая геометрия начала входить в программы высших учебных заведений. Среди появившихся учебников наиболее систематическим и близким к современному стилю явился учебник французского академика Лакруа (1798—1799). Его переиздавали многократно; 25-е издание, например, вышло в свет с добавлениями Эрмита в 1897 г. В этих учебниках Лакруа появилось и название этой науки — аналитическая геометрия, — сохранившееся и в дальнейшем.

Разумеется, и в дальнейшем аналитическая геометрия видоизменяла свой облик. Это было связано прежде всего с обобщениями координатного метода. Созданные Мёбиусом (1827) барицентрические координаты позволили ввести бесконечно удаленные элементы. Из проективной геометрии были привнесены однородные координаты, а затем проективные, как линейные комбинации простейших однородных координат. Дарбу ввел тетрациклические, а затем пентасферические координаты. В конце XIX — начале XX в. из механики в аналитическую геометрию вошли векторы, что значительно усовершенствовало ее аппарат.



Г. Монж
1746—1818

Итак, в XVIII в. было завершено формирование аналитической геометрии как науки и становление ее как учебного предмета, явившегося составной частью классической основы современного высшего математического и технического образования.

Дифференциальная геометрия. Эта математическая дисциплина, как известно, изучает геометрические объекты — кривые, поверхности и т. п. Ее своеобразие состоит в том, что, отправляясь от результатов аналитической геометрии, она широко использует методы математического анализа, в особенности дифференциального исчисления. Дифференциальная геометрия возникла в XVIII в. из области геометрических приложений анализа бесконечно малых. В некотором смысле дифференциальную геометрию можно даже считать предшественницей анализа, если в ее историю включить инфинитезимальные задачи геометрического характера. Последние составили важную часть предпосылок возникновения дифференциального и интегрального исчисления.

К началу XVIII в. средствами анализа бесконечно малых были раскрыты и исследованы многие факты теории плоских кривых. Однако это еще не привело к выделению особой науки. Все результаты входили в систему математического анализа, составляя совокупность геометрических применений с использованием преимущественно функций от одного переменного. Этим последним обстоятельством, кстати, и объясняется то, что именно плоские, а не пространственные кривые были вначале предметом исследования.

Следующий этап развития дифференциальной геометрии связан с введением методов изучения пространственных кривых и поверхностей. Необходимой предпосылкой для этого является, очевидно, распространение средств аналитической геометрии на трехмерные задачи. Как было указано выше, в заметном виде подобное распространение было осуществлено впервые в 1731 г. в книге Клеро «Исследования о кривых двоякой кривизны». В основном эта книга, как мы упоминали, посвящена трехмерной аналитической геометрии, но ряд вопросов решен в ней с помощью дифференциального и интегрального исчисления. Так, Клеро рассмотрел касательные и нормали к пространственным кривым, а также подкасательные и поднормали, ввел касательную плоскость к поверхности, содержащей данную кривую. Нормаль, по Клеро, является нормалью к касательной плоскости. Рассмотрены также геометрические места точек пересечения касательных и нормалей с координатными плоскостями.

Пространственная кривая определена как пересечение двух цилиндрических поверхностей, характеризующихся проекциями на две координатные плоскости. Клеро развернул кривую на эти цилиндрические поверхности, решил ряд задач о спрямлении кривых, определил площади частей цилиндрических поверхностей, ограниченных кривыми, нашел некоторые кубатуры. Этот круг вопросов потребовал от него, разумеется, применения методов интегрального исчисления.

Перенесение методов двумерной дифференциальной геометрии на трехмерный случай, осуществленное Клеро, в течение многих лет (около полувека) не было превзойдено никем. Однако под воздействием потребностей геодезии и картографии, а также механики появился ряд работ, в которых решались дифференциально-геометрические задачи. Сам Клеро тоже обнаружил новые дифференциально-геометрические факты. Побывав вместе с Мопертюи в геодезической экспедиции в Лапландии, он, в частности, в 1733 г. доказал, что вдоль геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса параллели (т. е. круга, перпендикулярного к оси вращения) на синус ее угла с меридианом постоянно:

$$\rho \sin \alpha = \text{const.}$$

Однако и в этой области, как и во многих в то время, доминировали работы Эйлера.

Серию соответствующих исследований Эйлер начал (1728—1732) по примеру многих из своих предшественников с изучения геодезических линий на поверхностях. Он вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности, заданной уравнением

$$P dx = Q dy + R dt$$

в виде

$$\frac{Q d^2 x + P d^2 y}{Q dx + P dy} = \frac{dx d^2 x + dy d^2 y}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

и рассмотрел ряд частных случаев, относящихся к геодезическим на поверхностях вращения. В 1736 г. Эйлер доказал, что точка, движущаяся по поверхности при отсутствии действующих сил, перемещается по геодезической. В том же году в статье о трактрисе он ввел натуральное уравнение плоской кривой и связал его с уравнением в декартовых координатах. Впоследствии, после ряда частных результатов, эти исследования привели Эйлера, с одной стороны, к созда-

нию (начиная с 1744 г.) вариационного исчисления (так как задача о геодезических принадлежит к числу вариационных), а с другой — к исследованиям по общей теории кривых и поверхностей.

Классическая основа современной общей теории поверхностей, однако, начала создаваться сравнительно поздно. Первые фундаментальные результаты в этой области, равно как и во всей трехмерной дифференциальной геометрии, оказалось возможным найти не ранее 1760 г. в статье Эйлера «Исследования о кривизне поверхностей» (опубликована в 1767 г.). В этой работе выведена известная теорема Эйлера следующим образом: исследуемая поверхность $z = z(x, y)$ пересекается произвольной плоскостью $z = \alpha x - \beta y + \gamma$. Получается в сечении плоская кривая, радиус кривизны которой выражен довольно сложно:

$$\frac{[\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + p^2 + q^2]^{\frac{3}{2}}}{\left[(\alpha - q)^2 \left(\frac{dp}{dx} \right) + (\beta + p)^2 \left(\frac{dq}{dy} \right) + 2(\alpha - q)(\beta + p) \left(\frac{dp}{dy} \right) \right] \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \left(\frac{dp}{dx} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{dq}{dy} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{dp}{dy} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots$$

Затем через нормаль к поверхности проводится секущая плоскость. Выражение для радиуса кривизны этого произвольного нормального сечения получается еще более сложным вследствие того, что теперь параметры α и β не являются независимыми. Они выражаются через параметр, определяющий сечение, т. е. через угол между горизонтальным следом нормальной плоскости и осью абсцисс.

Из нормальных сечений выбираются два: главное, перпендикулярное координатной плоскости $хоу$, и перпендикулярное главному. Для этих сечений выражение кривизны упрощается. Затем вводится угол φ между плоскостями нормального и главного сечений и вновь выводится общее выражение для радиуса кривизны:

$$\frac{-(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} \sec^2 \varphi}{\left(\frac{dp}{dx} \right) (p - q \operatorname{tg} \varphi)^2 + \left(\frac{dq}{dy} \right) (q + p \operatorname{tg} \varphi)^2 + 2 \left(\frac{dp}{dy} \right) (p - q \operatorname{tg} \varphi) (q + p \operatorname{tg} \varphi)}$$

Это громоздкое выражение Эйлер расписал для частных случаев: цилиндра $z = \sqrt{a^2 - y^2}$, конуса $z = \sqrt{n^2 x^2 - y^2}$ и эллипсоида $z^2 = a^2 - mx^2 - ny^2$, а затем преобразовал к виду

$$\frac{1}{L + M \cos 2\varphi + N \sin 2\varphi},$$

где

$$L = L \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right),$$

равно как M и N .

Отсюда равенство кривизн в локальной области поверхности определяется равенством величин L , M , N . Когда

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{N}{M},$$

то соответствующий радиус кривизны достигает экстремума. Сечения, дающие для радиуса кривизны максимум f и минимум g , взаимно перпендикулярны.

Эйлер делает последнее упрощение: пусть при достижении максимума f будет $\varphi = 0$. Тогда $N = 0$ и радиус кривизны будет

$$\frac{1}{L + M \cos 2\varphi}.$$

Минимум g радиуса кривизны достигается в этом случае при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Выразив L и M через f и g , Эйлер, наконец, получил

$$\frac{2fg}{f + g - \cos 2\varphi (f - g)}.$$

Употребляемая в настоящее время формула кривизны нормального сечения была получена из данного выражения Дюпеном через 50 лет.

Из приведенного примера видно, что в ходе создания общей теории поверхностей аппарат чрезвычайно усложнился. Преодолевать возрастающие в связи с этим трудности удавалось лишь немногим, а возможности приложений уменьшались. Но работа продолжалась под непосредственным давлением практики, прежде всего картографии и геодезии.

В 70-х годах одной из главных проблем в этой области сделалось развертывание поверхностей. Понятие развертывающейся поверхности ввел Эйлер. В статье 1771 г. о телах, поверхности которых можно наложить на плоскость, он исходит из соответствия между координатами (x, y, z) — точки развертывающейся поверхности и (t, u) — точки плоскости, с которой совпадает указанная точка поверхности после развертывания. На плоскости берется элементарный прямоугольный треугольник с вершинами:

$$(t, u), (t + dt, u), (t, u + du).$$

Ему соответствует элементарный треугольник на поверхности с вершинами:

$$(x, y, z), (x + l dt, y + m dt, z + n dt), \\ (x + \lambda du, y + \mu du, z + \nu du),$$

конгруэнтный с ним ($l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ — соответствующие частные производные: $\frac{\partial x}{\partial t} = l, \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda$ и т. д.). Конгруэнтность и равенство соответствующих отрезков привели Эйлера к следующим условиям развертывания:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + du^2, \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1, \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Решение Эйлера содержало общую идею изгибания поверхностей и повлекло за собой ряд значительных результатов. Так, Эйлер доказал, что касательные произвольной пространственной кривой образуют развертывающуюся поверхность. Тенсо (1780) ввел точки перегиба и классифицировал их. Точки плоского перегиба у него соответствовали случаю, когда кручение было равно нулю. Их можно было обнаружить по точкам перегиба плоской кривой, по которой развертывающаяся поверхность, соответствующая пространственной кривой, пересекала координатную плоскость xoy . Другой тип — точки линейного перегиба, соответствующие случаю, когда кривизна равна нулю. Эти точки являются точками перегиба для всех проекций пространственной кривой. В них соприкасающаяся плоскость перпендикулярна плоскости проекций. Аналогичную классификацию точек перегиба ввел Монж (1771 г., опубликовано в 1775 г.). Он же исследовал развертывание поверхностей.

Попытки построения общей теории поверхностей и пространственных кривых методами, заимствованными из аналитической геометрии и дифференциального исчисления, продолжались и в 80-х годах XVIII в. Новые идеи ввел в 1782 г. Эйлер, написав большую работу (опубликованную в 1786 г.). Он рассматривал пространственные координаты x , y , z кривой как функции длины дуги s и направляющих коэффициентов осей подвижного триедра, с помощью сферического отображения.

Ряд ученых — Монж, Лагранж, Ламберт, Менье и в особенности Эйлер — получили в дифференциальной геометрии значительное количество конкретных результатов. Последние находили применение в геодезии и картографии. Однако число лиц, занимавшихся этой проблемой, быстро уменьшалось. Утяжеление аппарата, не соответствующее раскрываемым возможностям, тревожило выдающихся математиков и заставляло их пессимистически оценивать перспективы развития общей теории поверхностей и пространственных кривых.

А тем временем пути дальнейшего развития дифференциальной геометрии уже намечались. Этими путями явились: а) большее привлечение геометрических соображений, временно отодвинутых на второй план усилиями по созданию аналитического аппарата; б) расширение последнего за счет привлечения теории дифференциальных уравнений; в) перевод геометрических фактов на язык дифференциальных уравнений и геометрическая интерпретация этих уравнений. Наибольшее продвижение в этих областях было достигнуто в революционной Франции конца XVIII в. исследованиями Г. Монжа и его учеников.

Гаспар Монж (1746—1818), выходец из крестьянско-буржуазной семьи, был, как и многие другие математики, активным деятелем Великой французской буржуазной революции. Неоднократно он занимал большие государственные посты (морской министр, организатор военной промышленности Франции и т. п.), с честью выполняя свои обязанности. Начав свою научно-педагогическую деятельность в качестве профессора военно-инженерной школы, Монж добился крупных успехов в математике, физике, химии и технике и в 1780 г. был избран членом Парижской академии наук. Он был также одним из основателей Политехнической школы в Париже (1794) и ее профессором.

В математике основные работы Монжа относятся к области геометрии. Охарактеризуем здесь его достижения в части,

относящейся к дифференциальной геометрии. В течение 70-х годов Монж опубликовал два сочинения: «Мемуар о развертках, радиусах кривизны и различных видах перегибов кривых двойкой кривизны» (1771 г., опубликовано в 1785 г.) и «О свойствах многих видов кривых поверхностей» (1775 г., опубликовано в 1780 г.). В них дано широкое и полное исследование свойств пространственных кривых и поверхностей, введено развертывание поверхностей, исследованы эволюты, огибающие и т. п.

В частности, в первой из упомянутых работ, где Монж изучал пространственные кривые, показано, что эти кривые могут иметь неограниченно много эволют, что они все лежат на развертывающейся поверхности (имеется в виду развертка нормалей) и что они являются геодезическими линиями этой поверхности. Монж ввел также спрямляющую развертывающуюся поверхность и показал, что исходная кривая является ее геодезической. В этой же работе введены упомянутые выше два типа точек перегиба и многие термины, сохранившиеся до нашего времени: ребро возврата, развертывающаяся поверхность, геометрическое место центров кривизны и др.

Вторая работа в основном посвящена развитию теории развертывающихся поверхностей. В ней, в частности, выяснено отличие линейных и развертывающихся поверхностей, найдено известное дифференциальное соотношение:

$$rt - s^2 = 0.$$

Установлено, кроме того, что развертывающиеся поверхности могут трактоваться как геометрические места касательных к пространственным кривым, а также то, что они суть огибающие некоего двупараметрического семейства плоскостей и т. д.

Однако классификация кривых и поверхностей по виду и по степеням их алгебраических уравнений и связанный с этим громоздкий аппарат не удовлетворяли Монжа. Новая классификация поверхностей была дана Монжем в лекциях для Политехнической школы, вышедших отдельными выпусками, а в 1801 г. — отдельной книгой. В ней Монж исходит из потребностей практических приложений и соответствующих нужд технического образования. Свойства и структура поверхностей проявляются яснее, если кроме уравнения задан способ их конструирования, формирования путем перемещения в пространстве заданной линии. При этом в качестве объекта изучения выступают не алгебраические уравнения, а дифференциальные уравнения в частных производных.

Оказалось, что дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка соответствует большое семейство поверхностей. В него входят цилиндрические и конические поверхности, поверхности вращения и каналов. Последние образуются движением окружности постоянного диаметра, плоскость круга которой перпендикулярна заданной кривой, а центр передвигается по ней. Кроме того, к этому классу относятся поверхности склонов насыпей, т. е. такие, у которых линиями наибольшего спуска являются прямые постоянного наклона, а также винтовые поверхности.

Рассматривая поверхности с различных точек зрения, Монж получал одновременно и дифференциальное уравнение поверхности, и конечное уравнение, как его интеграл. Например, рассматривая цилиндрические поверхности как такие, касательная плоскость которых параллельна образующей

$$x = az, \quad y = bz,$$

получим их уравнения

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Но в то же время из условия, что образующая цилиндрической поверхности параллельна прямой, получается конечное уравнение этой поверхности

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

где φ — произвольная функция. Последнее уравнение дает решение дифференциального уравнения цилиндрической поверхности. Соответствующие результаты для конических поверхностей

$$(x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c \text{ и } \frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right),$$

а для поверхностей склона насыпей

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2 \text{ и } z^2 = a^2 [(x - a)^2 + (y - \varphi(a))^2].$$

В этой части работы введена геометрическая интерпретация характеристик как линий пересечения двух бесконечно близких поверхностей и выведено их дифференциальное уравнение.

Дифференциальные уравнения второго порядка определяют семейства развортывающихся поверхностей, а также те линейные поверхности, которые описаны прямой, перемещающейся по двум пространственным кривым параллельно за-

данной плоскости, и классы поверхностей, кривизны которых удовлетворяют некоторым условиям (резные, трубчатые, минимальные). Общие линейчатые поверхности определяются дифференциальными уравнениями третьего порядка, равно как и более сложные поверхности, вроде поверхности, огибающей сферу переменного радиуса, центр которой движется по заданной кривой.

Перевод фактов теории поверхностей на язык дифференциальных уравнений в частных производных сопровождался у Монжа разработкой геометрической теории этих уравнений. В частности, он дал геометрическую трактовку общей теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Полный интеграл таких уравнений $f(x, y, z, a, b) = 0$ геометрически интерпретируется двупараметрическим семейством поверхностей. Если заменить $b = \varphi(a)$, где φ — символ произвольной функции, то уравнению

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$$

соответствует однопараметрическое семейство поверхностей (Монж назвал их: огибаемые). Уравнение огибающей их поверхности получается путем исключения параметра a из уравнений

$$f = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Отсюда при фиксированных значениях a получаются уравнения характеристик (образующих огибающих поверхностей, являющихся геометрическими образами общего интеграла). Все характеристики огибаются кривой, которую Монж назвал ребром возврата.

Подобные соображения, высказанные относительно уравнения

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

и его полного дифференциала

$$X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq = 0,$$

привели Монжа к системе уравнений

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}.$$

Интегрируя их, он получил уравнения характеристик.

Геометрические методы внесли также ясность в трактовку

уравнения, названного впоследствии уравнением Пфаффа:

$$P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Если условие интегрируемости выполняется, то его решение геометрически представляется семейством поверхностей

$$f(x, y, z) = C,$$

на которых любые кривые ортогональны к кривым

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Если же это условие не выполнено, то, как показал Монж, при задании дополнительной зависимости $\varphi(x, y, z) = 0$ уравнение Пфаффа определяет на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ однопараметрическое семейство кривых, ортогональных к тем же кривым

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Теория характеристик Монжа, сведение задачи решения дифференциальных уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, геометрическая интерпретация решений, тесная взаимосвязь и взаимодействие геометрических и механических методов — вся совокупность достижений Монжа привела дифференциальную геометрию к новому этапу. Он характеризуется введением в геометрию аппарата дифференциальных уравнений и дальнейшим расширением ее теоретических и практических возможностей.

В конце XVIII в. исследование одной инженерной проблемы дало дифференциальной геометрии основы теории линейных конгруэнций, стоявшей некоторое время особняком. Речь идет о задаче (см. рис. 7 на стр. 100), рассмотренной Монжем в «Мемуаре по теории выемок и насыпей» (*Mémoire sur la théorie des déblais et rémblais*, 1781), опубликованном в 1784 г.

Постановка задачи такова: даны два равных объема земли, ограниченных неравными замкнутыми поверхностями. Элементы одного объема необходимо перенести в другой с соблюдением принципа наименьшей работы и, следовательно, стоимости. Траектории переносимых частиц образуют двупараметрическое семейство прямых, удовлетворяющее условиям: а) через каждую точку D проходит одна и только одна прямая семейства; б) на каждой прямой семейства есть элементы объема R (точка, отрезок); в) линейчатая по-

верхность, образованная прямыми семейства, высекает в D и R равные объемы; г) $\iiint_{(D)} r dV = \min (dV — \text{элемент объема } D, r — \text{расстояние между соответствующими точками объемов } D \text{ и } R).$

В плоском случае семейство прямых $y = ax + b$ — однопараметрическое. Монж составлял дифференциальное уравнение, приравнивая элементарные площадки в фигурах D и R . Наличие общей касательной к D и R позволяет определить значение аддитивной постоянной уравнения.

Прямолинейные конгруэнции возникают в трехмерном случае. Монж доказал, что среди всех линейчатых поверхностей, образованных при этом, существуют только два семейства развертывающихся поверхностей. Если поверхности нормальны друг к другу, то конгруэнция ортогональна к поверхности. На последней образуется ортогональная сеть линий кривизны. Нормали к поверхности образуют вдоль этих линий развертывающуюся поверхность. Длина отрезка нормали от поверхности до пересечения с одной из двух бесконечно близких нормалей совпадает с длиной радиуса кривизны плоского сечения поверхности по линии кривизны.

Наконец, Монж утверждает, что условию минимальности работы в таких задачах удовлетворяют именно нормальные конгруэнции. Доказательство этого факта, однако, появилось лишь через сто лет (1886; Сен-Жермен и Аппель).

В первой половине следующего, XIX века происходило пополнение классического состава дифференциальной геометрии. Ученики и французские коллеги Монжа (Л. Карно, Фурье, Ампер, Пуассон и др.) по существу привели эту науку в ее классической части к современному состоянию. Отметим индикатрису и циклиду Дюпена (в работах 1813 и 1822 гг.), введение бинормали Сен-Венаном (1845), направляющие косинусы Френе (1847) и Серре (1851).

Новый этап дифференциальной геометрии ознаменован исследованиями Гаусса (1828) о внутренней геометрии поверхностей, т. е. о таких их свойствах, которые инвариантны относительно изгибания. Идеи Гаусса, а также работы о свойствах поверхностей постоянной гауссовой кривизны (Миндинг в 1839 г., Лиувилль в 1850 г.) создали область соприкосновения дифференциальной геометрии с неевклидовой¹. Об этом речь будет идти ниже².

¹ О дифференциально-геометрических исследованиях Гаусса см. А. П. Норден. Геометрические работы Гаусса. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 113—144.

² См. главу XI.

Начертательная и проективная геометрии. Методы начертательной геометрии формировались в области технических приложений математики. Факты учения о перспективе были известны с давних времен; особенно они были развиты художниками и архитекторами эпохи Возрождения. Эти факты составили необходимую основу для создания того раздела теоретической геометрии, в котором пространственные образы изучаются посредством комплекса отображений на плоскости. Метод координат для построения перспективы и соответствующие начала аксонометрического проектирования впервые применил Дезарг в 1636 г.

Формирование начертательной геометрии в особую математическую науку завершилось в работах Г. Монжа. С 1795 г. Монж читал в Политехнической школе лекции об ортогональном проектировании на плоскости. В 1798—1799 гг. он опубликовал уже полностью разработанный курс начертательной геометрии («*Géométrie descriptive*»), в котором систематически провел отображение пространственных фигур с помощью двух ортогональных проекций на две взаимно перпендикулярные координатные плоскости. Этот прием он дополнил разворачиванием проекционных плоскостей около оси проекций в одну плоскость и сведением пространственных построений и перемещений к соответствующим преобразованиям проекций.

Учебник начертательной геометрии Монжа состоял из пяти глав. В первой главе рассмотрены: цель и метод начертательной геометрии, а также элементарные задачи относительно прямых и плоскостей. Затем следуют построения касательных плоскостей и нормалей к кривым поверхностям. Пересечения кривых поверхностей рассмотрены в третьей главе, а соответствующие задачи вынесены в четвертую главу. Пятая глава посвящена исследованию методами начертательной геометрии кривизны линий и поверхностей.

Изложение Монжа не является элементарным. Он рассматривал ряд новых и трудных задач. Так, он исследовал поверхности с ребром возврата, геодезические поверхности и линии наибольшего ската на них, поверхности одинакового ската и т. п., навеянные его дифференциально геометрическими исследованиями.

Влияние работ Монжа и близких к ним по содержанию учебников Лакруа было длительным. Их сочинения в течение первой половины XIX в. переиздавались много раз. Усовершенствования частного характера и разработка различных способов проектирования составили основное содер-

жание работ по начертательной геометрии в дальнейшем. Сама же эта область геометрии со времен Монжа прочно вошла в круг математических дисциплин, входящих в систему технического образования.

Теоретический аспект технической перспективы и более общее понимание последней как одного из видов проективных преобразований были разработаны еще Дезаргом. Идея изучения проективных свойств геометрических объектов возникла как новый подход к трудной античной теории конических сечений с целью упростить и обобщить ее. Сочинение Дезарга «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639) и Б. Паскаля «Опыт о конических сечениях» (1640) содержат превосходное решение этой проблемы и служат основой новой геометрической науки — проективной геометрии.

Центральная проекция инженеров обогатилась бесконечно удаленными элементами, связав воедино пучки сходящихся и параллельных прямых, равно как и плоскостей. Весьма плодотворным оказалось и понятие инволюции. Проективные и инволюторные свойства конических сечений составили целую теорию, среди многочисленных теорем которой выделяются теоремы, названные по имени их авторов — Дезарга и Паскаля (явление, не так часто встречающееся в истории науки). Кроме того, Дезарг открыл много теорем о полюсах и полярах конических сечений.

Вначале лишь немногие ученые восприняли идеи Дезарга и Паскаля. Их сочинения оказались утерянными. Лишь в 1845 г. Шаль нашел копию сочинения Дезарга. От работ Паскаля по проективной геометрии сохранился лишь набросок. В течение более столетия можно отметить лишь эпизодические применения проективных преобразований. Сама эта область еще не выделилась в отдельную дисциплину. Поэтому строгое и систематическое построение начертательной геометрии, проделанное Монжем к концу XVIII в., сыграло роль необходимой предпосылки для построения проективной геометрии.

Сочинения Л. Карно «О корреляции фигур в геометрии» (1801) и «Геометрия положения» (1803) вновь обратили внимание ученых на полузабытую со времен Дезарга и Паскаля науку. Довершил (1822) теоретическое построение и оформление новой области математики офицер наполеоновской армии Понселе, который имел для этого достаточно свободного времени в русском плену в Саратове. Выделив класс проективных преобразований фигур, Понселе уделил

основное внимание соотношению между проективными и метрическими свойствами фигур.

Дальнейшее развитие проективной геометрии проходило под знаком поисков решения этой проблемы. В XIX в. соответственно наметились даже два направления. Приверженцы одного из этих направлений (в особенности Штаудт) стремились освободить проективную геометрию от всякой метрики. Другие (например, Мебиус) всячески развивали аналитические методы.

Противоречие это сгладилось в результате установившихся связей проективной геометрии с неевклидовой, с теорией функций комплексного переменного, когда раскрылись возможности проективной геометрии и ее подлинное место в системе математических наук. Общность проективных свойств была использована Кэли и Клейном в качестве средства рассмотрения различных геометрических систем с единой точки зрения. Синтетико-геометрические устремления Штаудта и др. послужили основой аксиоматического построения проективной геометрии в начале XX в.

Основания геометрии. К этой области геометрии относят те исследования и результаты, в которых изучается обоснованность выбора исходных понятий, дается анализ систем аксиом, положенных в основу геометрических теорий, а также содержатся конкретные преломления в последних ведущих математических идей. При этом раскрываются как внутриматематические связи геометрии, так и более широкие ее связи с другими науками.

Основания геометрии в XVIII в. — это по преимуществу основания евклидовой геометрии. Главным содержанием научных исследований был критический анализ «Начал» Евклида. Тяжеловесная система «Начал» не удовлетворяла многих математиков. Поэтому среди большого числа сочинений выделялась группа, в которой подвергалась критике система аксиом Евклида, в особенности постулат о параллельных.

В плане научного пересмотра оснований евклидовой геометрии нет необходимости упоминать о многочисленных дискуссиях, занимающих большое место в сочинениях, посвященных этому вопросу. Дело в том, что критика была пестрой, противоречивой, в большом числе случаев недостаточно обоснованной. По справедливому замечанию Даламбера, нельзя указать такого автора сочинения по основаниям геометрии, который не осуждал бы своих предшественников и современников в более или менее энергичных выражениях и не превозносил свою систему.

Придирчивый анализ оснований евклидовых «Начал», и в особенности аксиомы о параллельных и ее многочисленных «доказательств», привел математиков к убеждению в неудовлетворительности всех известных «доказательств» этой аксиомы. Некоторые из математиков, исходя из стремления доказать аксиому о параллельных путем

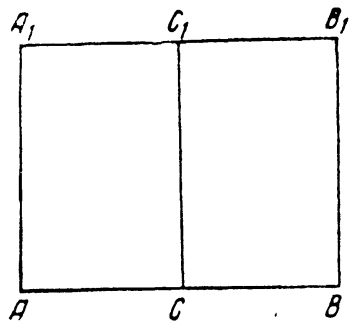


Рис. 8

приведения к противоречию, получили ряд теорем неевклидовой геометрии. Так, итальянский математик — монах И. Саккери рассматривал проблему параллельных таким образом: из концов отрезка AB восставим перпендикуляры AA_1 и BB_1 равной длины. Точки A_1 и B_1 , а затем середины C и C_1 оснований прямоугольника соединим прямыми. Определим величину углов прямоугольника $\angle A = \angle B = \frac{\pi}{2}$ по по-

строению. Перегнем чертеж по CC_1 .

$CC_1 \perp AB$; также $CC_1 \perp A_1B_1$ и $\angle A_1 = \angle B_1$.

Последующие предположения о величине этих равных углов получают у Саккери название гипотез: острого, прямого и тупого углов. Гипотеза тупого угла быстро привела его к противоречию. По замыслу Саккери, таков же должен быть исход и гипотезы острого угла, что дало бы доказательство аксиомы о параллельных. Однако случилось непредвиденное. Гипотеза острого угла при логическом ее развитии давала странные результаты, но к противоречию не приводила. Выводы Саккери, как выяснилось впоследствии, по существу совпадали с первыми теоремами геометрии Лобачевского: сумма углов треугольника оказалась меньше $2d$, площадь треугольника не была в состоянии неограниченно увеличиваться при увеличении его сторон; появилась необходимость в существовании некоторой абсолютной единицы длины и т. п.

Примерно через тридцать лет Ключель (1763) сделал обзор важнейших попыток доказательства теоремы о параллельных линиях и пришел к выводу, что Евклид правильно поместил это предложение среди аксиом.

В части научного исследования оснований геометрии XVIII век замыкается статьей Ламберта, швейцарца по происхождению, берлинского академика. Около 1766 г. он написал «Теорию параллельных линий», очевидным образом

навеянную работами Саккери и Ключеля. Ламберт модифицировал четырехугольник Саккери; именно он построил перпендикуляры: $AA_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AB$, $A_1B_1 \perp AA_1$ и свел задачу к определению величины угла B_1 . Гипотеза прямого угла дала евклидову геометрию, гипотеза тупого угла привела к противоречию. А вот гипотеза острого угла снова дала странные теоремы, но ни к каким противоречиям не привела.

Основания геометрии во второй половине XVIII в. приобрели помимо научного большое общественное значение. Вопрос о пригодности «Начал» в качестве школьного учебника геометрии был поставлен под сомнение и явился предметом широких дискуссий. В Англии и частично в Германии эти дискуссии привели к преобладанию изданий, сохраняющих дух и структуру евклидовых «Начал» и лишь более или менее упрощающих изложение. Во Франции, наоборот, традиции в этом направлении были подорваны.

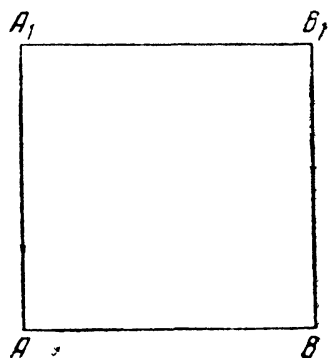


Рис. 9

Исходные установки создания школьного курса и в конечном счете всей системы элементарной геометрии определялись общими воззрениями французских энциклопедистов, в особенности Даламбера. В результате появился ряд учебников для начальной и средней школы французских авторов: Даламбера, Безу, Лежандра, Лакруа. С большей или меньшей решительностью авторы этих учебников отрывали преподавание геометрии от евклидовой схемы.

Влияние этих книг было велико. В них по существу был создан современный нам тип школьного учебника геометрии. Для этого была проделана огромная работа. То, что кажется нам теперь очевидным в построении основ школьного учебника геометрии, было достигнуто к концу XVIII в. усилиями французских математиков.

Что же конкретно было сделано? Во-первых, в основы геометрии были введены метрика и движение, которых столь тщательно избегал Евклид. Во-вторых, была произведена широкая арифметизация, в том числе арифметизация теории отношений и пропорций, в результате чего отпала необходимость в пятой книге «Начал». Введение алгебраической символики и элементов алгебры сняло необходимость во второй книге «Начал». Употребление радикалов упразднило в курсе геометрии сложную классификацию иррациональностей, раз-

виту в десятой книге «Начал». Так, евклидовы «Начала» были переработаны в курс элементарной геометрии, живое изложение которого сделало его доступным для широких кругов учащейся молодежи и для решения практических задач.

Создание новых принципов преподавания геометрии и углубленный анализ евклидовой системы аксиом по существу создали предпосылки для перестройки всей системы геометрических наук. Эта перестройка произошла в XIX веке. Начало ей было положено введением геометрии Лобачевского.

ГЛАВА VI

СОЗДАНИЕ ПРЕДПОСЫЛОК СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ. ФОРМИРОВАНИЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Декарт, связавший в единой науке — аналитической геометрии — методы алгебры и геометрии, считал, что он создал единую науку, синтезировавшую и как бы поглотившую обе эти дисциплины. Однако использование алгебраического аппарата в аналитической геометрии не повело к упразднению алгебры. Алгебра развивалась в дальнейшем своим оригинальным путем, имея собственную научную проблематику. Этой проблематикой оказалась по преимуществу теория алгебраических уравнений. Последняя включала в себя как формирование общей теории уравнений, так и накопление способов численного и графического их решения. Научная разработка подобных проблем приводила одновременно и к перестройке основ алгебры, связанной с расширением понятия числа, и к усовершенствованию алгебраического буквенно-символического аппарата. Развитие этих двух сторон алгебры, по существу определяющих ее содержание и предмет, достигло к концу рассматриваемого здесь столетия такого состояния, что сделало необходимым и возможным переход к качественно новым проблемам этой науки, связанным с возникновением теории Галуа и теории групп.

К алгебре примыкали, еще не будучи отчетливо отделены от нее, вычислительные арифметические приемы, в том числе методы элементарной комбинаторики, а также теоретические проблемы арифметики — теория чисел. В сознании ученых

XVIII в. они до известной степени объединялись в единую науку, для которой даже существовало специальное название — универсальная, или всеобщая, арифметика. Рассмотрению путей развития основных частей этой науки посвящена настоящая глава.

Алгебра. Самостоятельность путей развития алгебры определилась уже к началу XVIII в., когда в 1707 г. вышла в свет «Всеобщая арифметика» И. Ньютона. В ней алгебра излагалась в тесной связи с развитием вычислительных методов, как высшая стадия арифметики; геометрические вопросы были отнесены в область приложений. С самого начала Ньютон вводит операции как над буквенно-символическими выражениями, так и над числами (целыми и дробными). Введя читателя в технику тождественных алгебраических преобразований, Ньютон затем знакомит его с методами решения уравнений. На большом числе примеров, взятых из геометрии, механики и других наук, он демонстрирует сведение задачи к составлению алгебраического уравнения, корень которого будет являться решением задачи. Замыкают книгу данные общей теории уравнений, а также графическое решение последних с помощью геометрического построения корней.

«Всеобщая арифметика» является краткой записью лекций по алгебре, которые Ньютон читал в Кембриджском университете в 1673—1683 гг. В ней нет доказательств. Она не представляет собрания всех алгебраических достижений Ньютона. В других его работах содержится немало открытий в области алгебры. Среди них: обобщение формулы степени бинома на случай дробно-рациональных показателей, сообщенное в одном письме Ньютона Ольденбургу в 1676 г.; способ численного решения уравнений, известный под его именем и поныне; параллелограмм, т. е. способ разложения y , заданного уравнением $P_n(x, y) = 0$ (где P_n — полином), в ряд по дробным степеням x и др.

Алгебраическая тематика «Всеобщей арифметики» была в центре внимания многих видных математиков XVIII в. Способы численного решения уравнения (как точного, так и приближенного) разрабатывали Галлей, Лагранж, Мурайль, Фурье и др. Многочисленные попытки дать строгое доказательство формулы бинома в ее наиболее общей форме прекратились лишь тогда, когда Гаусс в работе о гипергеометрическом ряде (1811) решил эту проблему. Параллелограмм Ньютона получил в работах Стирлинга, де Гюа, Крамера

и других многообразные приложения: к теории алгебраических кривых, аналитических функций и др.¹.

Вслед за «Всеобщей арифметикой» Ньютона появился ряд монографий, содержащих систематическое построение алгебры. «Трактат об алгебре» Маклорена (1748) являлся еще по преимуществу комментарием к книге Ньютона, в которой не было приведено доказательств. Последующие же сочинения, в особенности знаменитая «Универсальная арифметика» Эйлера, показали возросшую степень выделения алгебры как самостоятельной науки.

Продиктованная слепнувшим Эйлером около 1767 г. «Универсальная арифметика» появилась в 1768—1769 гг. на русском языке. Помимо переизданий она была переведена на латинский, английский, французский и голландский языки. Ее влияние на определение научной проблематики алгебры и на структуру курса алгебры в университетах было очень большим. Монографический характер этой книги и цели, которые ставил перед подобными сочинениями их автор, позволяют по ее содержанию судить о состоянии алгебры во второй половине XVIII в.

«Универсальная арифметика» состоит из двух частей. В трех отделах первой части Эйлер уделил основное внимание обобщению правил решения арифметических задач и развитию буквенно-символического аппарата алгебры. Так, в первом отделе разъяснены операции над числами и одночленами, над радикалами, комплексными числами. Здесь же введены логарифмы.

Второй отдел посвящен операциям над многочленами. Кроме того, даются правила извлечения корней из чисел и алгебраических выражений (полиномов). Наконец, вводятся ряды как средство выражения дробно-рациональных функций и биномов с дробными и отрицательными показателями степени.

Третий отдел по содержанию самый разнохарактерный. В нем введены: действительное число (посредством алгоритма попеременного вычитания), многоугольные числа, пропорции и прогрессии (как арифметические, так и геометрические), периодические десятичные дроби и задачи на проценты.

¹ См., например, Н. Г. Чеботарев. Многоугольник Ньютона и его роль в развитии математики. В кн.: Н. Г. Чеботарев. Собр. соч., т. III. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, стр. 47—80.

Методам решения алгебраических уравнений и их общей теории посвящен первый отдел второй части. Здесь собраны методы решения алгебраических уравнений первых четырех степеней, а также систем линейных уравнений. Кроме того, рассмотрены способы приближенного вычисления корней алгебраических уравнений.

Последний отдел (второй отдел «Универсальной арифметики») включает в себя преимущественно методы нахождения целочисленных решений неопределенных уравнений первой и более высоких степеней. К ним присоединены решения других задач теоретико-числового характера. Так, здесь рассмотрена великая теорема Ферма и даны ее доказательства для $n = 3$ и $n = 4$. Введены подстановки Эйлера, обращающие квадратный трехчлен в точный квадрат.

Таким образом, предмет алгебры в XVIII в. определился. Она превратилась в науку об алгебраических уравнениях. В нее также входила разработка буквенно-символического аппарата, необходимого для решения уравнений. Алгебра тесно взаимодействовала с арифметикой, сохраняя в своем составе численные методы. С другой стороны, имело место столь же тесное взаимопроникновение методов и задач алгебры и теории чисел, преимущественно в области, относящейся к диофантову анализу. Современная элементарная алгебра в значительной мере сохранила в своей структуре эти особенности.

Сравнение «Всеобщей арифметики» Ньютона и «Универсальной арифметики» Эйлера позволяет нам отметить начало и (в значительной степени) итог формирования алгебры в XVIII в. Теперь рассмотрим кратко эволюцию научного содержания этой обширной и важной части математики и процесс создания предпосылок для нового, современного этапа ее истории.

В основе алгебраических исследований лежит понятие о количестве, величине, числе. Общность и поле приложений буквенно-алгебраических методов определяются общностью понятия числа. В течение XVIII в. это понятие переживало период медленного развития. Оно постепенно обогащалось, серьезно отставая, однако, от вычислительной практики и от приложений математического анализа.

Понятие действительного числа включало в себя: натуральные числа, положительные дроби, иррациональности. Последние имели и дошедшее до нас от времен античности общее определение через отношение с привлечением геометрических соображений: число есть то, что относится к едини-

це, как один отрезок прямой к другому, принятому за единицу. Однако общая концепция иррационального числа завоевала себе права гражданства лишь во второй половине XVIII в.

Большие споры еще кипели вокруг понятия отрицательного числа. В разноречивом хоре суждений преобладали противопоставления отрицательных чисел положительным. Находились даже ученые (Мазер, 1758; Френд, 1796), не признававшие отрицательных чисел, равно как и мнимых. Правила действий с отрицательными числами не имели убедительного доказательства. Лишь в следующем, XIX веке удалось представить отрицательные числа включенными в единую числовую систему и дать этому представлению убедительное доказательство.

Мнимые числа в алгебре появляются в виде корней уравнений. Их изучение, однако, продвинулось не в алгебраических трактатах, а под давлением настоятельных потребностей математического анализа. Именно в рамках анализа постепенно отыскивались и внедрялись правила формальных операций с мнимыми и комплексными числами. В 40-х годах Даламбер и Эйлер доказали, что всякое выражение, содержащее мнимые величины, приводится к виду $\alpha + \beta i$ (где α и β — действительные). Очевидная полезность комплексных чисел вызвала усиление внимания к вопросу об их сущности. Однако эта проблема оставалась нерешенной. Первый, кто разработал (по-видимому в интересах геодезической и картографической практики) способ геометрической интерпретации комплексных чисел точками на плоскости, был датчанин, землемер Вессель (1797 г., опубликовано в 1799 г.). Однако его работа осталась незамеченной, равно как и аналогичная интерпретация Аргана Ж. (1806). Только когда в 20-х годах XIX в. Гаусс и Коши ввели и обосновали операции над числами вида $\alpha \pm \beta i$, ввели термин «комплексное число», нашли «модуль» (Коши, 1821) или «норму» (Гаусс, 1828) комплексного числа, определили понятие сопряженности комплексных чисел, положение последних в математике существенно упрочилось. Комплексные числа вошли в алгебру.

Кстати упомянем еще об одной арифметико-алгебраической трудности, преодоленной лишь к концу XVIII в. Речь идет о введении аппарата десятичных дробей. Еще в 1585 г. голландский инженер и математик Стевин ввел их и показал их полезность. Но в течение более двухсот последующих лет десятичные дроби употреблялись лишь в астрономической

вычислительной практике. Понадобились усилия многих крупнейших математиков (Лагранж, Лаплас, Монж и др.), работавших в период 1790—1799 гг. единую десятичную метрическую систему (введена во Франции 24 апреля 1799 г.), чтобы аппарат десятичных дробей приобрел повсеместную актуальность. В XIX столетии, по мере перехода на десятичную систему новых государств, этот аппарат сделался частью элементарно-математической подготовки учащихся.

Часть алгебры, относящаяся к решению уравнений, составляла главное ее содержание. Этой проблеме посвящено огромное количество работ. В безбрежном море книг и статей — печатных свидетельств колоссальных усилий математиков, направленных на ее решение, — можно, впрочем, выделить некоторые направления.

Первое из них сложилось из попыток отыскания регулярного элементарно-алгебраического алгоритма (вроде метода Тартальи—Кардано для кубического уравнения и метода Феррари — для уравнения четвертого порядка), пригодного для решения уравнений степени выше четвертой. Авторами этих попыток руководила лишь интуитивная уверенность в возможности отыскания такого алгоритма, по крайней мере для действительных корней. Из большого числа работ этого направления приведем два примера: Чирнгаузена и Эйлера.

Метод Чирнгаузена, опубликованный в 1683 г., состоял в следующем. Пусть дано уравнение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Введем вспомогательное уравнение

$$y = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1}$$

с неопределенными пока коэффициентами. Если из обоих уравнений удастся исключить x (а это возможно), то получим

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \dots + c_n = 0.$$

Коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ — функции коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_n$ и $a_1, a_2, \dots, a_n$. Теперь подберем $b_1, b_2, \dots, b_n$ так, чтобы $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$. Тогда $y = \sqrt[n]{-c_n}$, и мы получим возможность заменить данное уравнение другим — степени $n-2$. Чирнгаузен сумел осуществить этот метод лишь для $n=3$ и опубликовал его без дальнейших проверок. Позднее

Эйлер проделал все выкладки для $n=4$. Для $n \geq 5$ это, разумеется, оказалось невозможным. Попытки подбора $b_1, b_2, \dots, b_n$ приводили к уравнениям, степень которых была больше пяти.

Отправляясь от приемов Тартальи, Эйлер пытался не раз подобрать для корней уравнений подходящие виды иррациональностей. В случае $x^3 = ax + b$ соответствующее выражение известно. Это $x = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$. Для уравнения $x^4 = ax^2 + bx + c$ Эйлер получал кубическую резольвенту подстановками $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$, или $x = \sqrt[4]{\delta} + \sqrt[4]{\epsilon} + \sqrt[4]{\phi}$. Однако экстраполировать этот прием, как надеялся Эйлер, вообще на уравнения вида

$$x^n = a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-1}, \quad n > 4$$

подстановкой

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[n]{\alpha_k}$$

не удалось. Около 1764 г. Эйлер обобщил эту подстановку

$$x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sqrt[n]{\alpha_k}.$$

Такую же форму подстановки одновременно открыл Варинг. Однако и эта весьма общая подстановка, позднее использованная Абелем для доказательства невозможности решения в радикалах общего уравнения пятой степени, не дала нужного результата.

Число попыток отыскания решения уравнений степени $n \geq 5$ элементарно-алгебраическими средствами было очень велико. По существу это был единственный путь решения проблемы, доступный в то время математикам. Он был равнозначен становлению позднейшей алгебраической теории резольвент. Кстати сказать, в ходе этих попыток сформировался и термин «резольвента» из латинского *aequatio resolvens*, что означает: разрешающее уравнение. В современной математике этот термин употребляется в разных смыслах. Мы имеем в виду алгебраический аспект: резольвента алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ суть тоже алгебраическое уравнение $g(x) = 0$, такое, что: а) его коэффициенты являются рациональными функциями коэффициентов уравнения $P_n(x) = 0$, б) знание его корней позволяет найти корни уравнения $P_n(x) = 0$ посредством решения уравнений степени,

низшей, чем n . По-видимому, первый, кто ввел термин «резольвента», был Эйлер (около 1732 г.).

Неудачи в поисках алгебраических алгоритмов, упомянутые выше, видимо, были одной из причин появления большого числа работ, посвященных приближенному нахождению корней уравнений как графическими, так и численными методами. Графические методы алгебраисты заимствовали из аналитической геометрии. Выбор кривых для геометрического решения уравнений определялся либо соображениями легкости их построения, либо наименьшей степенью соответствующих этим кривым алгебраических уравнений. Например, многие ученые (Лопиталь, Стирлинг, Бернуллы, Ньютон, Крамер и др.) пришли к мысли строить корни уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

как точки пересечения кривой

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x$$

и прямой $y = -a_n$. Более поздние построения опирались на графическое суммирование кривых

$$y = a_0x^n, y = a_1x^{n-1}, \dots, y = a_{n-1}x + a_n,$$

для чего был даже придуман специальный прибор.

Среди числовых приближенных методов упомянем метод Ньютона, который он продемонстрировал на примере $y^3 - 2y - 5 = 0$. Обозначим целочисленную часть корня, с которой начинает Ньютон, буквой ϵ для общности. Положив $y = \epsilon + p$, подставив его в уравнение и отбрасывая, в силу малости p , все его степени, кроме первой, найдем приближение p_1 в первом десятичном знаке. Затем, положив $p = p_1 + q$, повторяем всю операцию сначала и т. д. Так получают последовательные приближения корня: $x = \epsilon, p_1, p_2, \dots$

Уточнение этого метода, принадлежащее Галлею, состоит в том, что берется первое приближение ϵ корня уравнения $P_n(x) = 0$. Затем величина $\epsilon + p$ подставляется в уравнение, члены которого располагаются по степеням p :

$$P_n(\epsilon + p) = P_n(\epsilon) + Ap + Bp^2 + \dots = 0.$$

Затем p определяется из квадратного уравнения

$$Bp^2 + Ap + P_n(\epsilon) = 0.$$

Ньютон применил аналогичный метод к решению буквенных уравнений с двумя неизвестными $f(x, y) = 0$, или, что то

же самое, к приближенному вычислению значения неявных функций. Связанное с этим разрешение уравнения относительно одного из неизвестных, т. е. представление $f(x, y) = 0$ в виде $y = f_1(x)$, где $f_1(x)$ есть степенной ряд, вообще бесконечный, Ньютон производил с помощью специального приема, получившего название параллелограмма Ньютона. Разновидности этого метода известны под названием прямоугольника, треугольника, многоугольника, диаграммы, но неизменно связаны с именем его творца¹.

Численные методы требуют в качестве предварительных данных решения ряда общих вопросов: об определении числа положительных, отрицательных и мнимых корней, об отделении корней и об определении границ, между которыми находятся корни. В XVII в. было рассмотрено большое число частных видов уравнений. М. Ролль в конце века установил, что между двумя корнями уравнения $f'(x) = 0$ может находиться не более одного корня уравнения $f(x) = 0$. Верхняя граница действительных корней уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

по Роллю, равна $|a_k| + 1$, где a_k — наибольший по модулю отрицательный коэффициент уравнения.

Не вдаваясь в частности, отметим, что для указанного круга проблем уже в XVII—XVIII вв. были в основном найдены те теоремы, которые сейчас составляют содержание соответствующих глав курсов высшей алгебры². Поэтому мы укажем лишь на редко употребляющийся метод, принадлежащий Лагранжу.

Пусть известно первое приближение p корня x уравнения, такое, что $p < x < p + 1$. Подставим в уравнение $x = p + \frac{1}{y}$. Новое уравнение имеет действительный корень $y > 1$, так как

$$1 > \frac{1}{y} > 0, \quad \varepsilon(y) = q,$$

т. е.

$$y = q + \frac{1}{z}.$$

¹ См. ст. Н. Г. Чеботарев. Многоугольник Ньютона и его роль в развитии математики. В кн.: Н. Г. Чеботарев. Собр. соч., т. III, стр. 47—80.

² См., например, Г. М. Шапиро. Высшая алгебра. Учпедгиз, М., 1938.

Повторяя этот прием, получим

$$x = p + \frac{1}{q + \frac{1}{z + \dots}}$$

Если цепная дробь обрывается, то корень рационален. Если же он иррационален, то цепные дроби позволяют оценить, с какой погрешностью осуществлено любое последовательное приближение.

Практически приемы решения алгебраических уравнений, накапливаясь, открывали перспективы для развития теоретической части алгебры. Будущее этой науки постепенно раскрывалось в разнообразных теоретических исследованиях, группирующихся вокруг двух проблем (разрешимости алгебраических уравнений в радикалах и доказательства основной теоремы алгебры).

Мы уже указывали¹, что Жирар (1629) и Декарт (1637) впервые установили, что алгебраическое уравнение может иметь столько корней, сколько единиц имеет его наивысшая степень. В XVIII в. постановка этой проблемы трансформировалась. Теперь уже требовалось доказать, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет именно n корней (действительных и комплексных). В качестве эквивалентного утверждения предлагалось доказать разложимость левой части уравнения в произведение линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами. Над решением этой и других связанных с ней проблем трудились Даламбер, Эйлер, Лагранж, Гаусс и многие другие математики.

Первое доказательство было дано Даламбером (1746). Оно состояло в установлении факта, что

$$\min |P_n(x)| = 0.$$

Однако соображения Даламбера были нестрогими, содержали в явной форме апелляцию к средствам математического анализа и не облегчали затруднений алгебраистов.

Полученное почти одновременно доказательство Эйлера (опубликованное в 1751 г.) опиралось на рассмотрение графиков кривых

$$y = P_n(x)$$

¹ См. К. А. Рыбников. История математики, ч. 1, стр. 135.

соответственно при четном и нечетном n . Оказывалось при этом, что уравнение $P_n(x)=0$ при n нечетном имеет один вещественный корень или нечетное их число, при n четном существует четное число вещественных корней или же их вовсе нет; если свободный член уравнения четной степени отрицателен, то уравнение имеет во всяком случае два вещественных корня разных знаков. Трудность была тем самым сведена к доказательству теоремы для уравнений четной степени $2m$. Так как $2^{n-1} < 2m < 2^n$, то, домножая уравнение $2^n - 2m$ линейными множителями вида $x - \alpha$, видим, что доказательство достаточно проводить для уравнений, степени которых имеют вид 2^n . Относительно уравнений последнего типа Эйлер высказал важную теорему: левая часть алгебраического уравнения степени 2^n ($n > 1$, целое) разлагается на два множителя степени 2^{n-1} , и наметил пути ее доказательства¹.

При этом он нашел два важных свойства алгебраических уравнений: а) рациональная функция корней уравнения, которая принимает при всех возможных подстановках корней κ различных значений, удовлетворяет алгебраическому уравнению степени κ , коэффициенты которого суть рациональные функции коэффициентов данного уравнения; б) рациональная функция корней уравнения, инвариантная относительно перестановок корней, есть рациональная функция коэффициентов исходного уравнения.

Уточняя доказательство Эйлера, Лагранж ввел и разработал теорию подобных функций, т. е. функций, инвариантных при подстановках одной и той же группы и только при них. У Лагранжа речь идет о подобии симметрических функций корней уравнения в случае, если все 2κ значений, которые способны они принимать при всех перестановках корней, различны между собой. Относительно подобных функций Лагранж доказал, что они рационально выражаются друг через друга и через коэффициенты данного уравнения.

Смысл доказательств Эйлера и Лагранжа с современной точки зрения таков. Пусть дано уравнение $P_n(x)=0$. Его коэффициенты — элементы поля D действительных чисел. K — поле Галуа данного уравнения. Степень K над D : $n=2^r \cdot \kappa$ (κ — нечетное). По теореме Силова, существует подгруппа H порядка 2^r группы Галуа G этого уравнения. Образует

¹ См. И. Г. Башмакова. О доказательстве основной теоремы алгебры. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. X. Гостехиздат, М., 1957, стр. 257—304.

q — поле элементов, инвариантных относительно подстановок из H :

$$D \subset q \subset K.$$

Степень K над q есть 2^r , степень q над D — нечетное κ . Поле q образуется присоединением к D корня ν неприводимого над D многочлена $P_1(x)$ степени κ . Но κ нечетно; следовательно, $q = D^{2^1}$.

Рассмотрим K над D . Его степень 2^r . Если $K = D(\eta)$, то η — есть корень уравнения $P_2(x) = 0$ степени 2^r с действительными коэффициентами, как в уравнениях, рассматривавшихся Эйлером.

Известно, что группы порядка степени простого числа, т. е. p^r разрешимы; их нормальные делители имеют простые порядки p . Здесь же $p = 2$. Значит,

$$D \subset K_1 \subset \dots \subset K_r = K,$$

где каждое из промежуточных нормальных полей квадратичное по отношению к предыдущему. Соответствующие квадратные уравнения, которые нужно решать над предыдущим полем, чтобы получить последующее, имеют либо действительные, либо комплексные корни. Пусть K_i — первое поле, совпадающее с полем комплексных чисел; последующие поля будут тоже совпадать с этим же полем. В противном случае все поля совпадут с D .

Обратно, если исходить из $K = K_r$, то для отыскания корня уравнения $P_2(x) = 0$ степени 2^r надо решить над D одно уравнение степени 2^{r-1} . Его корни породят поле K_{r-1} , а над ним — одно квадратное уравнение. Возможно повторение этого рассуждения для степени на единицу ниже и т. д.

Элементы этих идей новой алгебры явственно угадываются в доказательствах Эйлера и Лагранжа.

Другая группа элементов теории Галуа была накоплена в ряде исследований проблемы приводимости уравнений. Ньютон первый вышел за пределы вопроса о приводимости уравнений над полем рациональных чисел. Он предложил алгоритм для решения вопроса о том, может ли уравнение «быть приведено при помощи какого-либо иррационального делителя, или, что то же самое... нельзя ли так разделить уравнение на две равных части, чтобы из каждой вы могли извлечь корень»².

¹ Так как единственными неприводимыми уравнениями нечетной степени над полем действительных чисел являются линейные уравнения.

² И. Ньютон. Всеобщая арифметика. Изд-во АН СССР, М., 1948, стр. 270.

Помимо постановки вопроса о возможности приведения уравнения над различными областями это рассуждение содержит некоторую идею теории Галуа. В самом деле, Ньютон ставит по существу вопрос о присоединении к полю рациональных чисел иррациональностей вида $\sqrt[k]{\kappa}$ и о приводимости уравнения над этим расширенным полем. Иначе говоря, речь идет об отыскании квадратичных подполей поля разложения полинома.

Алгоритмы Ньютона, а вслед за ним и Варинга для решения вопроса о том, распадется ли заданное уравнение на множители, если область рациональных чисел расширить присоединением квадратичной, биквадратичной или кубической иррациональности, просты, но громоздки. Ньютон и Варинг представляли всякий раз полином в виде произведения множителей с неопределенными коэффициентами, зависящими от иррациональностей исследуемого вида. Затем следовали попытки такого подбора неопределенных коэффициентов, чтобы искомое разложение осуществилось.

Громоздкие методы не открывали перспектив и приводили к ошибкам. Тем не менее они были полезны. В них фактически рассматривались поля алгебраических чисел, определялся общий вид элементов этих полей.

Накопление предпосылок нового этапа развития алгебры в XVIII в. достигает кульминационного пункта в исследованиях Лагранжа, нашедших отражение в его «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» (1771—1772). В этом сочинении Лагранж критически пересмотрел все накопившиеся к тому времени методы и попытки решения алгебраических уравнений. К открытым уже резольвентам он добавил еще одну, весьма общего характера.

Он рассмотрел алгебраическое уравнение

$$x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots = 0$$

и, в соответствии с методом Чирнгаузена, вспомогательное уравнение

$$y = -(x^{n-1} + fx^{n-2} + gx^{n-3} + \dots + \kappa)$$

с неопределенными коэффициентами $f, g, \dots, \kappa$. Исключим x из обоих уравнений:

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + \dots + Py + T = 0.$$

Подберем коэффициенты $f, g, \dots$, так, чтобы

$$A = B = \dots = P = 0.$$

Тогда решение заданного уравнения сведется к решению системы уравнений: $y^n = -T$ и $n-1$ уравнения, в которых находятся неопределенные коэффициенты $f, g, \dots$. Корни первого из уравнений будут:

$$y_1 = \sqrt[n]{-T}, \quad y_1\alpha, \quad y_1\alpha^2, \dots, y_1\alpha^{n-1},$$

где $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ — первообразные корни единицы (корни уравнения $y^n - 1 = 0$). Подставляя эти значения в выражение для x :

$$x = \dot{a}_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1},$$

получим систему n уравнений:

$$x_1 = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + \dots + a_{n-1} y_1^{n-1};$$

$$x_2 = a_0 + a_1 y_1 \alpha + a_2 y_1^2 \alpha^2 + \dots + a_{n-1} y_1^{n-1} \alpha^{n-1}:$$

$$x_n = a_0 + a_1y_1\alpha^{n-1} + a_2y_1^2\alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}y_1^{n-1}\alpha.$$

Вследствие того, что

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = 0;$$

$$1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots = 0;$$

получим

$$na_0 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

$$na_1y_1 = x_1 + \alpha^{n-1}x_2 + \alpha^{2(n-1)}x_3 + \dots$$

$$na_2y_1 = x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \alpha^{2(n-2)}x_3 + \dots$$

Упростим систему с учетом $\sum_{i=1}^n x_i = -m$, откуда $a_0 = -\frac{m}{n}$. По-

$$T = -y_1^n = -1, \quad a_{n-1} = \frac{c^1}{n}, \quad a_{n-2} = \frac{c''}{n}, \dots,$$

$$a_1 = \frac{c^{(n-1)}}{n},$$

получим

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots$$

линейную функцию корней уравнения, названную позднее резольвентой Лагранжа.

Функция $\theta = t^n$ при всех перестановках

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ x_{i1}, & x_{i2}, & \dots, & x_{in} \end{pmatrix}$$

корней уравнения $P_n(x) = 0$ принимает $k \leq n!$ значений. Коэффициенты уравнения

$$\theta^k + b_1\theta^{k-1} + \dots + b_k = \prod_{i=1}^k (\theta - \theta_i) = 0$$

суть симметрические функции от θ_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Последние в свою очередь являются симметрическими функциями корней x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, корни x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можно определить через $k \leq n!$ корней θ_k .

Однако все известные для уравнений степени $n \leq 4$ способы отыскания резольвент, приводят при $n \geq 5$ к резольвенте степени $k > n$. Это заставило Лагранжа сомневаться в том, что рассмотренные им методы могли решать уравнения степени $n \geq 5$. Однако он считал, что рассмотренные им группы подстановок корней уравнений являются «дорогой к решению», так как он обнаружил на этом пути решения класса так называемых циклических уравнений, т. е. уравнений с циклической группой подстановок.

Лагранж достиг весьма большой общности. Он рассматривал уравнения с произвольными буквенными коэффициентами. Относительно их он исследовал поля рациональных функций корней. Он ввел группу подстановок корней уравнения (симметрическую группу) и изучил соответствие между ее подгруппами и подполями рациональных функций, инвариантных относительно подстановок этих подгрупп. Наконец, Лагранж доказал и первые теоремы теории групп, например, что порядок подгруппы есть делитель порядка группы.

Вслед за Лагранжем подстановки корней уравнений подверг изучению Руффини. Он предложил в 1799 г. доказательство неразрешимости в радикалах уравнения степени $n \geq 5$. Однако это доказательство не было общим, так как Руффини принял без доказательства, что корни резольвент рационально выражаются через корни исходного уравнения. В последующих работах, появившихся в 1801, 1802, 1806 и 1813 гг., он пытался доказать это предложение, но полного обоснования так и не смог добиться. Однако он провел си-

стематическое исследование конечных перестановок и доказал ряд важных теорем. При этом он впервые ввел термин «группа». В 1814 г. Руффини открыл и сформулировал правило приближенного вычисления корней уравнений, переткрытое в 1819 г. Горнером.

Алгебра, таким образом, развивалась в течение XVIII в. как наука о решении алгебраических уравнений. В ней получили известное завершение проблемы, связанные с элементарно-математическими средствами решения уравнений. Были разработаны основные предпосылки для создания теории Галуа и теории групп. Алгебра на рубеже XIX в. находилась накануне коренной перестройки, сделавшей ее соединением ряда алгебраических наук, предметом изучения которых стали объекты сложной и абстрактной природы: группы, поля, кольца и т. д.

Развитие алгебры в этот период демонстрирует еще раз общую закономерность развития математики: новые области математики рождаются в недрах старых, их основные понятия и методы оперирования проходят период «эмбрионального» развития. Затем происходит возникновение новой математической дисциплины. Характерной особенностью процесса возникновения является переворот в методе. Выделение сопровождается возникновением нового символического аппарата, несущего двоякую роль: отражения реальных математических процессов и оперативную. Новыми областями в данном случае являются теория Галуа и теория групп.

Теория чисел. В первой части настоящей книги и в ряде глав второй части мы неоднократно отмечали отдельные факты истории теории чисел. Эта область математики, в которой изучаются свойства целых, рациональных и алгебраических чисел, а также свойства любых других чисел, вытекающие из приближений их рациональными числами, выросла из арифметики. В XVIII в. она еще тесно была связана с алгеброй. Однако своеобразие проблематики и методов теории чисел уже осознавалось достаточно определенно. Накопившийся запас теоретико-числовых фактов также способствовал выделению теории чисел в особую область математики. Ниже мы даем очерк основных моментов истории теории чисел.

Еще в Древней Греции, как мы упоминали, были выделены по принципу общности свойств различные подмножества целых чисел: простые, квадратные, совершенные, полигональные, составляющие пифагорейские тройки и др. Там же была разработана стройная теория делимости, доказана бесконечность числа простых чисел в натуральном ряде, изобретен ал-

горитм Евклида. Сочинения Диофанта представили много примеров раннего и высокого развития неопределенного анализа. История математики в Китае и Индии свидетельствует о раннем появлении ряда теорем теории сравнений и других фактов теории чисел.

Однако развитие теории чисел происходило весьма медленно. Между новыми открытиями проходили десятилетия, а иногда и века. Теоретико-числовые результаты достигались в большинстве выдающимися учеными и оставались изолированными. Возможными причинами этого являлись: специфичность предмета теории чисел, возрастающая абстрактность в постановке задач этой теории, необычайная трудность их решения, требующая высокого развития математики и незаурядных личных качеств ученого. В силу этих причин существенное обогащение теории чисел и ее формирование и обособление имели место лишь в XVII—XVIII вв. В этот период ее проблемами занимались несколько крупных ученых: Ферма, Декарт, Б. Паскаль, Валлис, Лейбниц, Эйлер и др.

В течение XVII в. наибольших результатов добился П. Ферма. В его переписке и на полях принадлежавшей ему книги сочинений Диофанта содержится большое число теоретико-числовых результатов. В частности, Ферма записал там свою знаменитую «великую» теорему: уравнение $x^n + y^n = z^n$ для целых показателей при $n > 2$ неразрешимо в целых числах. Приписка Ферма гласила, что он владеет поистине чудесным доказательством, но на полях недостаточно места, чтобы его записать. Однако общее доказательство этой теоремы не найдено до настоящего времени, хотя ею занимались многие величайшие математики и бесчисленное множество любителей. Теорема приобрела популярность в начале XX в., когда за решение этой задачи некий Вольфскель установил премию в 100 тысяч марок (премия была отменена в конце первой мировой войны).

Своей постановкой великая теорема, по-видимому, была обязана стремлению Ферма обобщить теорему о составлении пифагорейских троек целых чисел¹. Тот же источник, древнегреческую математику, можно с большой уверенностью назвать и для малой теоремы Ферма². В связи с этим он исследовал делимость чисел и проблему нахождения всех делителей заданного числа. К этому же кругу вопросов относятся работы Ферма о совершенных и других числах специальной структуры.

¹ См. К. А. Рыбников. История математики, ч. 1, стр. 27.

² См. там же, стр. 186.

Большое место в исследованиях Ферма, разумеется, занял неопределенный анализ Диофанта, т. е. целочисленные решения неопределенных уравнений и их систем. Особенное внимание он уделил уравнениям вида $ax^2 + 1 = y^2$, где a не есть точный квадрат. Относительно этого уравнения (за которым впоследствии, в силу случайной обмолвки Эйлера, утвердилось наименование теоремы Пелля) Ферма умел а) находить его наименьшее решение; б) получать, зная наименьшее, все остальные решения.

К XVIII в. в математике накопилось много теоретико-числовых фактов, порой весьма важных и сослуживших в дальнейшем полезную службу при появлении новых областей математики. Однако эти факты не были систематизированы, связи между ними не раскрыты, возможности применяемых методов не изучены. К тому же после работ Ферма, Паскаля и др. в теории чисел наступило полувековое затишье, почти непрерываемое, вплоть до того времени, когда теорией чисел занялся Эйлер. С его именем связано становление теории чисел как науки. Проблемы этой области математики находились в поле зрения Эйлера в течение всей его жизни. Им он посвятил, как подсчитано, огромное число работ: около 150.

По-видимому, первым стимулом к занятиям Эйлера теорией чисел была переписка с Гольдбахом. Последний в письме от 1 декабря 1729 г. спрашивал: «Известно ли тебе замечание Ферма о том, что все числа вида $2^{2^x-1} + 1$, именно 3, 5, 17 и т. д., суть простые, причем сам он, по его признанию, не смог этого доказать, и, насколько я знаю, после него никто не доказал»¹.

Вскоре (1732—1733) Эйлер доказал, что теорема Ферма неверна уже для $x = 6$, ибо число $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ делится на 641. Кроме того, он доказал ряд теорем, относящихся к проблеме делимости, в том числе малую теорему Ферма.

Нахождение доказательств, обобщений или опровержений теорем Ферма было только первым этапом теоретико-числовых исследований Эйлера. В последующем он охватил и развил все основные разделы теории чисел, как алгебраической, так и аналитической, определив ее состав и методы на много лет вперед.

¹ Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle, t. I. St. Pet., 1843, S. 10.

Работы Эйлера определили проблематику, структуру и методы алгебраической теории чисел, т. е. той ее части, в которой используются по преимуществу методы арифметики и алгебры и не привлекается по возможности аппарат теории функций и анализа бесконечно малых.

Здесь ему прежде всего принадлежат работы по теории делимости, выросшей к нашему времени в теорию сравнений. Помимо доказательства малой теоремы Ферма Эйлер ввел функцию $\varphi(m)$, значение которой равно числу чисел, меньших m и взаимно простых с ним. Относительно этой функции он доказал, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ и что $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$, если p — простое и a — целое. Затем он нашел выражение $\varphi(m)$ для произвольного m , если известно представление m в виде произведения простых чисел, и доказал, что $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m , если a и m — взаимно просты.

Эйлер ввел понятие первообразного корня по модулю m : число g называется первообразным корнем по модулю m , если $g^k - 1$ делится на m тогда и только тогда, когда k кратно $\varphi(m)$. Им введено также понятие индекса числа N по модулю m при основании g , т. е. показателя степени k числа g , такого, что разность $g^k - N$ делится на m . Он нашел ряд свойств индексов, доказал существование первообразного корня по любому простому p и теорему Вильсона: $(m-1)! + 1$ делится на m , если m — простое число.

Эйлер ввел понятие степенных вычетов и создал их теорию. Число a он назвал вычетом степени n по модулю p , если существует такое целое число x , что $x^n - a$ делится на p . Он показал, что свойства степенных вычетов важны не только для решения двучленных сравнений

$$x^n - a \equiv 0 \pmod{p},$$

но и для других задач, например для задачи представления чисел квадратичными формами. Занимаясь свойствами квадратичных вычетов, он открыл (1722) знаменитый и теперь закон взаимности: даны два простых числа p и q ; если хотя бы одно из них имеет вид $4n+1$, то сравнения

$$x^2 \equiv p \pmod{q}, \tag{1}$$

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \tag{2}$$

являются одновременно разрешимыми. Если же и p и q имеют вид $4n+3$, то из разрешимости одного из уравнений следует неразрешимость другого.

После Эйлера квадратичный закон взаимности доказал Лежандр.¹ Гаусс до 1801 г. дал восемь доказательств этого закона. Наконец, Лежандр к 1808 г. нашел удобную форму записи квадратичного закона взаимности:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}},$$

введя символ

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} +1, & \text{если } p \text{ есть квадратичный вычет по mod } q \\ -1, & \text{если } p \text{ есть квадратичный невычет по mod } q \end{cases}.$$

Не менее велики заслуги Эйлера в разработке проблем диофантова анализа (решения неопределенных уравнений в целых и рациональных числах), для нужд которого он разработал и строго обосновал теорию непрерывных дробей. Здесь прежде всего заслуживает упоминания доказательство великой теоремы Ферма для $n = 3$ и $n = 4$. Для этого Эйлер использовал и развил метод спуска, изобретенный Ферма. Этот метод состоит в следующем. Пусть существует нетривиальное решение (x_0, y_0, z_0) уравнения Ферма, удовлетворяющее условию $x_0 y_0 z_0 \neq 0$. Тогда оказывается возможным найти другое нетривиальное решение (x_1, y_1, z_1) , элементы которого также натуральны и соответственно меньшие по величине, чем (x_0, y_0, z_0) . Продолжая, мы придем к неограниченной последовательности убывающих троек натуральных чисел, т. е. к противоречию. Эйлер доказал множество теорем, примыкающих к указанной теореме Ферма, более подробное рассмотрение и перечисление которых представляло бы интерес лишь для специалистов.

Из других задач диофантова анализа Эйлер уделил большое внимание задаче отыскания целочисленных решений уравнения второго порядка с двумя неизвестными и с целыми коэффициентами

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Вопрос о получении бесконечного числа решений, если известно одно решение (x_0, y_0) , Эйлер свел к решению уравнения Пелля

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

(D — натуральное, не квадратное число).

В широкую и разветвленную алгебраическую теорию чисел, создаваемую Эйлером, входят работы о представлении чисел квадратичными формами $ax^2 + by^2$. Еще Валлис (1685)

¹ Однако доказательство Лежандра было неполным.

утверждал, что всякое число можно разложить на множители единственным образом. Ему принадлежит теорема, что число простых делителей числа $m = p^\lambda \cdot q^\mu \cdot r^\nu$ ($p, q, r \dots$ — простые) равно $(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1) \dots$, а их сумма равна

$$\frac{p^{\lambda+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\mu+1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{r^{\nu+1} - 1}{r - 1} \dots$$

Для нахождения простых делителей больших чисел Эйлер и строил метод, основанный на представлении этих делителей в виде квадратичных форм. Последние должны обладать тем свойством, что простые числа представляются, если возможно, единственным образом, а сложные — неединственным или не представляются вообще. Оказалось, что подобное свойство зависит от произведения $n = ab$. Те числа n , которые порождают подобные формы, Эйлер назвал удобными и нашел критерий удобства числа: число n является удобным, если для каждого целого $x < \sqrt{3n}$, взаимно простого с n , сумма $n + x^2$ будет или простое, или удвоенное простое, или квадрат простого, или степень числа два. Удобных чисел Эйлер нашел 65, наибольшее из них — 1848. Предположение Эйлера, что 1848 — последнее удобное число, до сих пор не доказано.

В трудах Эйлера содержались все предпосылки для создания системы алгебраических методов теории чисел. Они послужили источником для позднейших исследований. Например, исследования Эйлера о представлении чисел значениями квадратичных форм и о виде простых делителей легли в основу созданной Гауссом общей теории квадратичных форм. Попытка Куммера (1847) продолжить работу Эйлера по решению великой теоремы Ферма, помимо доказательства ее для $n \leq 100$, привела к открытию отсутствия единственности разложения на простые множители в алгебраических полях и к созданию теории идеалов. Работы по теории сравнений и открытие квадратичного закона взаимности повлекли обобщения Э. Куммера, Д. Гильберта и др., завершенные наиболее общей формой этого закона, найденной и доказанной И. Р. Шафаревичем.

Особо важным этапом развития теории чисел являлось применение к решению ее задач методов математического анализа. Эта часть теории чисел — аналитическая — берет свое начало также в XVIII в. в трудах Эйлера. Последний разработал аналитические методы для решения проблемы распределения простых чисел в ряду натуральных чисел, а

также для ряда аддитивных проблем. Эти методы раскрывают связи между свойствами целых чисел и свойствами аналитических функций.

Первая из указанных проблем получила для своего решения методы, основанные на применении так называемой дзета-функции, введенной Эйлером,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

и тождества Эйлера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

(n — натуральные, p — простые).

Рассматривая значения обеих частей этого тождества при $s > 1$ и сколь угодно близких к единице, Эйлер смог дать аналитическое доказательство известного со времен Евклида факта бесконечности числа простых чисел в натуральном ряду. Кроме того, он высказал утверждение (не дав ему строгого доказательства):

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \cong \ln \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}.$$

Настойчивые поиски аналитически выраженного закона распределения простых чисел, как известно, не привели к успеху до сих пор. Некоторые подходы к решению, впервые после Евклида, появились у Эйлера, высказавшего предположение, что неограниченная арифметическая прогрессия, a_0 и d которой — простые, содержит неограниченно много простых чисел. Лежандр, разделявший с Эйлером эту уверенность, тоже не дал доказательства. Доказать гипотезу Эйлера удалось только в 1837 г. Дирихле.

Лишь в 1798 г. Лежандр отыскал эмпирическую формулу для функции $\pi(x)$, значения которой равны числу простых чисел $p \leq x$:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}.$$

Позднее Чебышев (1848) установил, что $\pi(x)$ при возрастании x колеблется около отрезков ряда, асимптотически приближающего

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x},$$

и дал близкие оценки амплитуды этих колебаний.

Для комплексной плоскости Риман заметил, что порядок разности $\pi(x) - \text{Li}(x)$ зависит от расположения так называемых нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$, действительные части которых лежат между нулем и единицей. Он высказал также гипотезу, что все действительные части при этом лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Строгое доказательство для оценки значения $\pi(x)$ в предельном случае

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} = 1$$

появилось лишь в 1896 г. Относительно же гипотезы Римана авторы настоящего доказательства Адамар и Валле-Пуссен смогли найти только, что на прямой

$$\sigma = 1, \quad s = \sigma + iy$$

нет нулей $\zeta(s)$.

Весьма значительным является вклад математиков XVIII в. (по преимуществу Эйлера) в аддитивную теорию чисел, где изучаются разложения больших целых чисел N на слагаемые

$$N = a_{1i_1} + a_{2i_2} + \dots + a_{si_{i_s}},$$

взятые из некоторых числовых последовательностей $\{a_{jk}\}$.

Задачи аддитивной теории чисел (или, как ее тогда называли *partitio numerorum*) ведут свое происхождение, по-видимому, от задачи Фибоначчи¹ о гирих: как подобрать числа (веса гирь), $a_1, a_2, a_3, \dots$, чтобы всякое число могло быть представлено как их сумма. Лейбниц (1674) в связи с этой задачей отметил, что число 3 допускает три разбиения, 4 — пять разбиений, 5 — семь, 6 — одиннадцать, а 7 — пятнадцать разбиений.

Эйлер занимался проблемами *partitio numerorum* с 1741 г. Он исходил из двух бесконечных произведений

$$\prod_1^{\infty} (1 + a_k z) \quad \text{и} \quad \prod_1^{\infty} (1 - a_k z)^{-1}.$$

¹ См. К. А. Рыбников. История математики, ч. 1, стр. 111.

Разложим вслед за Эйлером эти произведения в ряд по степеням z . Коэффициент при z^n первого степенного ряда есть сумма всех произведений по n в каждом из чисел a_k без повторений. Во втором ряду будут те же суммы, но с произвольными повторениями a_k .

Для решения задачи о числе представлений целого числа N суммами k натуральных чисел, одинаковых или различных, Эйлер рассматривал два произведения:

$$f_1(x) = \prod_1^{\infty} (1 + x^k z) = \sum_0^{\infty} A_k(x) z^k;$$

$$f_2(x) = \prod_1^{\infty} (1 + x^k z)^{-1} = \sum_0^{\infty} B_k(x) z^k,$$

где

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x^k; \quad B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x^k.$$

Здесь $a_{n,k}$ — число представлений числа k в виде суммы n различных положительных слагаемых, а $b_{n,k}$ — число представлений k в виде суммы n произвольных положительных слагаемых без учета порядка сложения.

Далее, Эйлер находил функциональные уравнения для $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и с их помощью определял функции $A_n(x)$ и $B_n(x)$:

$$A_n(x) = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x) \dots (1-x^n)}; \quad B_n(x) = \frac{x^n}{(1-x) \dots (1-x^n)}.$$

Разлагая в степенной ряд функцию

$$\frac{1}{(1-x) \dots (1-x^n)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} x^k,$$

Эйлер свел свою задачу к задаче отыскания числа решений уравнения

$$N = \sum_{k=1}^n k x_k$$

в целых неотрицательных числах $x_1, \dots, x_n$, которое равно $C_{n,N}$. Он построил для этого таблицу чисел $C_{n,N}$.

Далее, переходя к определению чисел C_n из

$$\sum_0^{\infty} c_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

или, что то же, к определению числа решений уравнения

$$N = \sum_{k=1}^n k x_k$$

в целых неотрицательных $x_1, \dots, x_n$, он эмпирически нашел, что

$$\prod_1^{\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}} \right).$$

Опираясь на соотношения между произведениями и степенными рядами, Эйлер доказал много предложений о числе разнообразных представлений целых чисел. Отметим здесь два из них:

во-первых, тождество для суммы делителей числа n ($\int$ — знак суммы)

$$\int(n) = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \\ + (-1)^k \left[\int \left(n - \frac{3k^2-k}{2} \right) + \int \left(n - \frac{3k^2+k}{2} \right) \right];$$

во-вторых, теорему, что всякое целое число может быть единственным образом представлено суммой степеней числа 2, что вытекает из

$$\prod_0^n (1+x^{2^k}) = \sum_0^{\infty} x^n.$$

Метод Эйлера по существу являлся методом производящих функций. После примерно столетнего перерыва, с конца XIX в., этот метод нашел широкие применения как в теории чисел, так и в других математических дисциплинах: комбинаторном анализе, теории вероятностей и др. В теории чисел он

был существенно усовершенствован И. М. Виноградовым, а также Г. Харди и Дж. Литлвудом.

К аддитивным задачам теории чисел, поставленным в XVIII в., относится и задача Варинга (1770): всякое натуральное число ≥ 2 представимо суммой n -ных степеней натуральных чисел, причем число членов r суммы зависит только от n . Варинг не дал ее доказательства. Как и в большинстве задач теории чисел, успех и в этом случае достигался трудно. Так Лагранж доказал, что для $n=2$, $r=4$. Затем было установлено, что для $n=3$, $r \leq 7$, что $r > n$. Лишь в 1909 г. Гильберт дал первое общее доказательство. Он установил, что r — конечно для всех n , но не смог дать для r достаточно хорошую оценку. В 1919 г. Харди и Литлвуд нашли, что $r \leq n \cdot 2^{n-1}$, а позднее, что $r \leq (n-2)2^{n-1} + 5$. В 1934 г. И. М. Виноградов при помощи созданного им нового метода тригонометрических сумм существенно продвинул задачу Варинга, дав почти исчерпывающую оценку $r \leq 3n(\ln n + 11)$ для больших n . Этим же методом он доказал одну из проблем Гольдбаха, что всякое достаточно большое нечетное число является суммой трех простых чисел. Две другие проблемы Гольдбаха: всякое четное число есть сумма двух простых и всякое нечетное число есть сумма простого и двух квадратов — остаются нерешенными до настоящего времени.

В завершение нашего обзора аналитических методов теории чисел XVIII в. мы упомянем исследования об арифметической природе чисел. В части, относящейся к числам π и e , применение аппарата цепных дробей, разработанного главным образом Эйлером, позволило Ламберту в 1767 г. доказать иррациональность числа π^1 , а также e^m для m — рационального. Трансцендентность этих чисел была установлена лишь в конце XIX в.: доказательство трансцендентности числа e дано в 1873 г. Ш. Эрмитом, а числа π — в 1882 г. Ф. Линдеманом. К работам Эйлера относится постановка проблемы об арифметической природе чисел типа $a^{\sqrt[n]{n}} = b$. Эйлер во «Введении в анализ бесконечно малых» (1748; § 105) указывал, что логарифм рационального числа при рациональном основании, если он не целый, должен быть трансцендентным. В частности, он утверждал, что в выражении $a^{\sqrt[n]{n}} = b$ (где n не есть квадратное число) a и b не могут быть одновременно рациональными. В более общем виде

¹ См. И. Г. Ламберт. Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга. В сб.: «О квадратуре круга». ГТТИ. М.—Л., 1934, стр. 105—166.

эту проблему сформулировал Д. Гильберт, как проблему об арифметической природе чисел a^b , для a и b алгебраических. В 1929—1934 гг. А. О. Гельфонд полностью решил эту задачу, доказав, что число вида a^b (где a — алгебраическое, отличное от нуля и единицы, а b — алгебраическая иррациональность) является трансцендентным.

Теория чисел в XVIII в. по существу переросла в отдельную область математики. В ней определились практически все главные проблемы и направления. В сочинениях Эйлера, Лагранжа, Лежандра, Ламберта и других математиков были выработаны многочисленные методы теории чисел, как элементарно-алгебраические, так и аналитические. Все эти исследования, естественно, нуждались в систематизации, в приведении к логически-стройной структуре с единых позиций. Эта работа в конце XVIII в. была начата Лежандром, который выпустил в 1797—1798 гг. «Опыт теории чисел», имея целью построить систему сведений о свойствах целых чисел. В дальнейших переизданиях он дополнял ее результатами Гаусса, Абеля и других математиков XIX в. В двух томах этой книги содержится огромный материал, накопленный в теории чисел, что придает ей помимо исторического практическое значение, как весьма полезного справочника.

Характер и направление исследований по теории чисел в течение почти всего XIX в. были, по существу, определены работами Гаусса. Свое основное сочинение в этой области — «Арифметические исследования» — Гаусс начал в 1797 г., и к 1801 г., когда его автору было всего 24 года, оно вышло в свет. Последующие теоретико-числовые работы Гаусса появились в 1811 г. и в период 1828—1832 гг.; это свидетельствует о постоянном интересе Гаусса к теории чисел.

Открытия Гаусса в теории чисел огромны. Мы, к счастью, имеем возможность отослать заинтересованного читателя к прекрасной статье Б. Н. Делоне «Работы Гаусса по теории чисел»¹, ограничившись здесь краткими и предварительными оценками.

Мы уже упоминали, что Гаусс много сил отдал изучению квадратичного закона взаимности, дав ему 8 (!) строгих доказательств. Изучая квадратичные формы, он по существу создал арифметику квадратичных расширений. Эта часть его исследований послужила исходным пунктом и образцом для последующей разработки арифметики алгебраических расши-

¹ В сб. «Карл Фридрих Гаусс» Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 11—112.

рений, вплоть до работ Д. Гильберта по теории полей классов.

Гаусс открыл и доказал биквадратичный закон взаимности и построил арифметику целых комплексных чисел. Аппарат теории сравнений, столь употребительный в наши дни, обязан своим возникновением Гауссу. Для построения в XIX в. теории алгебраических чисел эта группа открытий Гаусса послужила отправным пунктом и образцом.

В своих исследованиях Гаусс ввел и изучил целый ряд групп: группу классов форм одного дискриминанта, группу родов и др. На конкретных примерах он первый изучил структуру абелевых групп. В частности, он показал, что абелева группа является прямым произведением групп циклических, доказав тем самым основную теорему теории абелевых групп.

Считается общепризнанным, что со времени работ Гаусса теория чисел развивается уже как стройная теория¹, задачи которой побуждают к развитию новых и тонких методов анализа (в особенности теории функций комплексного переменного), алгебры и даже геометрии. Определелись и основные направления теории чисел. Это: а) разработка специальных методов теории чисел, носящих иногда название элементарных; б) аналитические методы, применяемые по преимуществу к задачам распределения; в) диофантовы уравнения и диофантовы приближения.

Далее мы будем иметь возможность возвращаться к вопросам развития теории чисел (например, в связи с рассмотрением фундаментальных исследований П. Л. Чебышева). При этом, однако, характер и размеры настоящей книги не позволят нам дать общий, более или менее детальный, обзор теории чисел и ее взаимосвязей с другими математическими науками.

Методы теории вероятностей и комбинаторного анализа. Обзор развития математики в XVIII в., предпринятый нами в первых шести главах, был бы неполон, если бы мы опустили теоретико-вероятностные работы и применяемый в них аппарат. По-видимому, теория вероятностей в те времена не занимала еще заметного места среди других дисциплин. Но будущие успехи математики (как и вообще науки), получая необходимые предпосылки в наиболее развитых ее областях, выкристаллизовываются, выделяются чаще всего в областях

¹ См. А. О. Гельфонд и Ю. В. Линник. Чисел теория. БСЭ, т. 47, стр. 386.



К. Ф. Гаусс
1777—1855

новых, еще количественно небольших и зачастую слабо развитых.

Теория вероятностей в XVIII в. расширила сферу своих приложений. Помимо азартных игр ее методы проникли в статистику (в частности, в демографию), страховое дело, теорию ошибок наблюдений, теорию стрельбы. Это расширение происходило в тесной связи с обогащением математических методов и результатов теории вероятностей.

Наиболее ранним теоретическим результатом в этой области было, по-видимому, доказательство Муавром (1730) локальной предельной теоремы, оценивающей асимптотически вероятность

$$P_n(t) = P\{\mu \leq np + t\sqrt{np(1-p)}\}$$

того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых p — вероятность наступления искомого события, число этих наступлений μ не превзойдет $np + t\sqrt{np(1-p)}$. Муавр доказал эту теорему для $p = \frac{1}{2}$; он вывел также необходимую для этого формулу Стирлинга:

$$s! = \sqrt{2\pi s} \cdot s^s e^{-s} e^{\theta_s},$$

где остаточный показатель θ_s удовлетворяет условию

$$|\theta_s| \leq -\frac{1}{12s}.$$

Позднее Лаплас обобщил эту теорему для любого p $0 < p < 1$. Появившаяся здесь интегральная форма этой теоремы

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

и связанное с этим понятие нормального распределения вероятностей играют в дальнейшей теории вероятностей большую роль. В частности, упомянем принадлежащее Пуассону (1837) распространение теорем Муавра—Лапласа на случай обобщения закона больших чисел в формуле Бернулли для независимых испытаний, вероятность появления в которых некоторого события зависит от номера испытания. Пуассон получил при этом новый вид распределения вероятностей, известный ныне под именем закона Пуассона, и использовал его в работах по теории стрельбы.

Проблема вычисления вероятностей гипотез на основе определенных результатов некоторых наблюдений в разных аспектах рассматривалась в работах Д. Бернулли, Эйлера, Симпсона, Кондорсе и др. Важнейшим результатом здесь были формулы Бейеса, опубликованные в 1764 г. Примыкающая к этому теория ошибок наблюдений получила разработанный Лежандром, Лапласом и Гауссом метод наименьших квадратов.

Помимо указанных двух групп теоретических результатов можно отметить довольно большое число конкретных задач теоретико-вероятностного характера. Среди них: задача контроля продукции, так называемая «петербургская игра», задача Бюффона о бросании иглы и др.

На рубеже XVIII и XIX вв. теоретико-вероятностные результаты были сведены в единую систему, построенную на четко определенных основных понятиях. Выделение новой математической дисциплины — теории вероятностей — нашло яркое выражение в ряде работ Лапласа, особенно в его классической «Аналитической теории вероятностей» (1812 г., затем 1814, 1820 и 1866 гг.).

Аппарат теории вероятностей в то время, когда основным ее объектом были азартные игры, состоял из арифметических приемов, почерпнутых в особенности из комбинаторики. Вместе с обогащением методов теории вероятностей за счет привлечения предельных рассмотрений и других средств математического анализа удельный вес комбинаторных приемов стал уменьшаться. Но комбинаторика продолжала развиваться, так как ее содержание по существу не исчерпывалось приложениями к теории вероятностей.

Существование комбинаторики как научной дисциплины можно вести от работ Лейбница и Я. Бернулли. Первый из них к 1666 г. дал первое систематическое построение этой части математики в «Рассуждении о комбинаторном искусстве». Позднее (около 1700 г.) Лейбниц усовершенствовал комбинаторную символику с помощью развитой системы индексов. Я. Бернулли в сочинении «Искусство предположения» (1713) построил комбинаторику как основной для того времени аппарат решения теоретико-вероятностных задач. Здесь же он доказал важный частный случай закона больших чисел, известный как теорема Бернулли. В связи с изучением сумм вида $\sum_k k^m$ он открыл числа, названные по его имени, числами Бернулли.

Однако решение многих конкретных задач комбинато-

рики длительное время не сопровождалось усовершенствованием общей теории, вплоть до конца 70-х годов XVIII в. В это время в Германии сформировалась многочисленная математическая школа, основателем и руководителем которой был К. Ф. Гинденбург.

Прошло 40—50 лет и комбинаторная школа, исчерпав возможности имевшихся в их распоряжении немногочисленных оперативно-вычислительных методов и не преодолев противоречия между содержанием задач и громоздким формально-символическим аппаратом, распалась.

Комбинаторные методы остались в арсенале ученых как средство решения задач в различных областях математики. Новое развитие комбинаторный анализ начал получать в середине XX в. в связи с выяснившимися широкими возможностями приложения во многих практических вопросах.

ЧАСТЬ 2

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XIX В.
И НАЧАЛО ПЕРИОДА
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В XIX в.

В истории математики XIX в. знаменует начало нового периода, получившего (согласно периодизации А. Н. Колмогорова) название периода современной математики. Понятие современной математики, равно как и выделение соответствующего периода ее развития, разумеется, несколько неопределенно. Оно, по-видимому, не может быть иным, так как развитие науки постоянно меняет представления о современности ее главных теоретических идей и практических достижений. Мы здесь условимся включать в период современной математики такой отрезок времени, начало которого отмечено совершением в математике таких преобразований, которые послужили главной причиной приведения ее к современному состоянию. При таком определении (как, по-видимому, и при всяком другом) неизбежным становится более или менее обстоятельный обзор этих преобразований, чему мы посвятим ряд последующих глав.

Характерные особенности нового периода развития математики с большой определенностью стали появляться в самом начале XIX в. Мы имеем в виду работы Абеля и Галуа о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Они выдвинули на первое место в алгебре ряд весьма абстрактных общих понятий, среди которых первое место безусловно принадлежало понятию группы. Создание и развитие теории Галуа и теории групп сделалось одной из главных задач новой алгебры.

Открытие в 20—30-х годах XIX в. Лобачевским, а также Я. Больяи и Гауссом основных фактов неевклидовой гиперболической геометрии, а в 60—70-х годах — отыскание их интерпретаций вызвали в системе геометрических наук пре-

образования поистине революционного характера. Значение последних состояло не только в изменении лица геометрии; оно вышло за пределы этой области математики, а затем и за пределы математики вообще.

Система дисциплин, составляющих математический анализ, подверглась в своих основах глубокой перестройке на основе создаваемой теории пределов и теории действительного числа. К концу XIX в. логические средства анализа пополнились специфическими разновидностями гипотетико-условных суждений, применяющих аппарат особых неравенств (так называемый ϵ , δ — аппарат). Это придало выводам и приложениям анализа новый, более высокий уровень математической строгости.

Наряду с развитием аппарата классического математического анализа и его приложений из него выделились самостоятельные математические дисциплины. Прежде всего, это огромные области дифференциальных уравнений, а также теорий функций действительного и соответственно комплексного переменного.

Отмеченные выше явления не исчерпывают всей картины развития математики в XIX столетии. Мы выбираем их в качестве примеров главных, определяющих линий этого развития. Прежде чем перейти к более детальному их рассмотрению, отметим еще три характерные черты, имеющие общий для большинства математических наук характер.

Мы имеем в виду, во-первых, расширение содержания предмета математики. Оно обусловлено тем, что во всех математических науках происходил процесс обобщения основных понятий, замены одних понятий другими, более общими. Этот процесс происходил как следствие возросших требований смежных наук, когда исследовать огромное количество задач оказывалось возможным лишь с иных, более общих, точек зрения. Большое количество задач возникало также внутри математики в результате внутренних логических потребностей развития теории.

Среди исследований, возникших в результате запросов математической теории, было в те времена особенно много таких, которые отражают усиление внимания к обоснованию математики. Это является второй характерной чертой математики XIX в. Попытки обоснования математики в целом или отдельных ее частей столь же многочисленны, как и в прошлом, XVIII, столетии. Но они приняли теперь иное направление. В них производился критический пересмотр исходных понятий (определений) и утверждений (аксиом); дела-

лись попытки построения строгой системы определений и доказательств; производился критический пересмотр логических приемов математических доказательств.

Повышенное внимание к вопросам обоснования, изменившийся характер соответствующих исследований, усиление требований математической строгости имеют вполне реальные и определенные причины. Эти причины по преимуществу коренятся в огромном объеме фактического материала и большом количестве новых математических теорий. Помимо усложнения структуры самой математики связи последней с практикой стали весьма сложными, во многом опосредованными. Отдельные результаты и даже целые области новой математики получают конкретные применения не сразу, а через годы и десятилетия. При таком положении дел ждать сигналов о корректности или некорректности теории в виде обнаруженных ошибок становилось бессмысленно. Поэтому наша наука, обращаясь к практике, как к критерию истинности ее результатов, вынуждена была учитывать и практику логических суждений, преломляя их в требования логической строгости. Понятие математической, или логической, строгости в ходе истории, как известно, меняется. Оно отражает накопленный опыт работы человеческого мышления в области математики — опыт, который суммируется в постепенно складывающиеся требования к строгости. Устойчивый стандарт математической строгости сложился лишь к концу XIX в. Он опирался на теоретико-множественные концепции и на арифметику натуральных чисел. Однако вскоре борьба воззрений вокруг этой проблемы обострилась в связи с открытием противоречий (антиномий) в канторовской теории множеств.

Третьей характерной особенностью развития математики в XIX в. является значительное расширение области приложений, в основном обусловленное увеличением возможностей аппарата математического анализа. В математическое естествознание вслед за механикой и оптикой вошли задачи термодинамики и электромагнитных явлений. Резко возросли математические запросы техники: баллистики, машиностроения и др.

Задача составления общих характеристик, столь трудная вообще, делается в особенности трудной по мере приближения к современности. Для математики XIX в. эта задача осталась пока недоступной как вообще, так и в частности в рамках настоящей книги. Поэтому, не умножая далее соображений общего характера, перейдем к изложению истории

развития отдельных математических дисциплин, возвращаясь к общим соображениям тогда, когда это будет необходимо. Поскольку раньше всего принципиальные изменения проявились в алгебре, мы и перейдем сейчас к освещению истории этой науки, и прежде всего истории алгебраических проблем на рубеже XVIII и XIX вв.

ГЛАВА VII

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Проблемы общей теории алгебраических уравнений. Современная алгебра — чрезвычайно широкая и разветвленная область математики. Она объединяет большое число самостоятельных научных дисциплин. Их общим предметом являются алгебраические операции, представляющие собой далеко идущие абстракции операций элементарной алгебры. Эти операции определяются в многообразных множествах. Последние выбираются для исследования преимущественно из соображений их приложимости. При этом оказывается необходимым заботиться о сохранении известной близости свойств определенных в них операций и свойств операций над числами. Так выделился класс алгебраических образований, наибольшее значение среди которых приобрели поля, кольца, группы и структуры. Алгебра взаимодействует с другими областями математики, участвуя в образовании новых, «пограничных», дисциплин (топологическая алгебра, теория групп и алгебр Ли и т. п.).

Столь общие воззрения на природу и состав алгебры сложились по существу недавно, лишь в XX в. Как было показано выше (глава VI), вплоть до XIX в. основной задачей алгебры являлось решение алгебраических уравнений, понимаемое как нахождение корней уравнения с помощью рациональных операций и операции извлечения корня. В поисках общей формулы математики перепробовали громадное количество методов и к самому концу XVIII в. были вынуждены прибегнуть к фактическому рассмотрению полей и групп, еще не вводя этих понятий явно.

Буквально на рубеже XVIII и XIX вв. в алгебре были сделаны открытия необычайной важности. Они сопровождались введением в эту науку ряда новых понятий (в первую очередь, понятия группы), легших в основу современной алгебры. Эти открытия повели к преобразованию всей алгебры в течение XIX в. Мы имеем здесь в виду результаты К.-Ф. Гаусса, Н.-Г. Абеля и Э. Галуа, относящиеся к доказательству основной теоремы алгебры, доказательству неразрешимости в радикалах уравнений степени $n \geq 5$ и созданию теории Галуа. Рассмотрим подробнее эти результаты.

Карл-Фридрих Гаусс сделал свои первые открытия в алгебре еще совсем молодым человеком во время обучения в Геттингенском университете (1795—1798). В марте 1796 г., занимаясь задачей отыскания корней уравнения

$$x^n - 1 = 0,$$

он обнаружил связь между этой задачей и делением окружности на равные части, доказав, что правильный 17-угольник можно вписать в круг с помощью циркуля и линейки. Соответствующий алгебраический факт, что уравнение $x^{17} - 1 = 0$ разрешимо в квадратных радикалах, Гаусс обобщил вскоре, найдя критерий возможности такой разрешимости (уравнение разрешимо для простого n вида $n = 2^{2^k} + 1$) и дав его геометрическую интерпретацию.

При доказательстве этой группы предложений Гаусс развил методы, послужившие одной из исходных точек при создании теории Галуа, по собственному признанию ее автора. Так, например, Гаусс явно высказал, что цель его исследований полинома

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

состоит в том, чтобы последовательно разлагать полином на множители вплоть до линейных, обнажая при этом структуру уравнения.

Гаусс установил, что уравнение $X = 0$ степени $m = n - 1$, где n — простое, неприводимо в поле рациональных чисел и нормально над ним, т. е. все его корни рационально выражаются через один из них. Оказалось, что эти корни имеют вид: $\alpha, \alpha^\beta, (\alpha^\beta)^\beta, \dots$, т. е. что группа автоморфизмов этого уравнения циклическая. Остается лишь один шаг для того, чтобы обнаружить, что любая подгруппа циклической группы является ее нормальным делителем. Этот шаг сделал

Галуа, учитывавший также указание Лагранжа, что подстановка корней уравнений указывают путь к построению их общей теории.

Через три года, в 1799 г., Гаусс получил в Гельмстедте степень доктора за диссертацию, посвященную доказательству основной теоремы алгебры. Спустя много лет он вернулся к этой теореме и дал (в 1815, 1816 и 1849 гг.) три новых доказательства.

Первоначальная формулировка этой теоремы, данная Жираром (1629) и Декартом, содержала, как мы уже упоминали, утверждение, что уравнение $P_n(x) = 0$ может иметь столько корней, сколько единиц содержит его степень. В связи с последующим введением комплексных чисел $a + bi$ это понимание возможности переросло в уверенность, что корней уравнения $P_n(x) = 0$ (где n — степень уравнения) будет именно n — действительных и комплексных. Вслед за первым доказательством Даламбера (1746) появились и другие. При этом предполагалось, что всякий полином может быть разложен на линейные множители

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Оставалось доказать, что все корни x_i ($i=1, 2, \dots, n$) имеют вид $a + bi$ (a и b — действительны). Проблема заключалась теперь в установлении разложимости всякого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами в произведение вещественных множителей степени $n = 1$ или $n = 2$.

Мы не будем рассматривать те доказательства, в которых содержатся явные апелляции к фактам математического анализа. Вообще говоря, отказаться полностью от использования свойств непрерывности при доказательстве этой теоремы невозможно. Однако вопрос о чисто алгебраическом доказательстве основной теоремы алгебры был в это время весьма актуальным. Такое алгебраическое доказательство искал и Гаусс.

В упомянутой выше докторской диссертации он критически рассмотрел все доказательства и обнаружил их общий недостаток: априорное предположение, что корни уравнений существуют. В действительности необходимо существование корней доказывать, чтобы избежать порочного круга. Существование Гаусс относил к области комплексных чисел $\{a + bi\}$, так как никаких других более общих видов величин

он не мог себе представить. Тем не менее он отмечал, что если бы были определены другие числовые области, то вопрос существования корня надо было относить к ним.

Алгебраическое доказательство Гаусса исходило из предположения, что заранее задана область K комплексных чисел. Состояло это доказательство в установлении того факта, что каждое уравнение с вещественными коэффициентами имеет корень в указанной области. В иной, эквивалентной, постановке требуется доказывать разложимость любого полинома, коэффициентами которого являются действительные числа, на вещественные множители первой и второй степени.

Отказ от предположения о существовании корней уравнения, постулированный Гауссом, а также от обращения к фактам математического анализа, сильно затруднил задачу. По существу ему пришлось строить поля разложений многочленов. Громоздкое доказательство заняло специальный мемуар (1815). Оно потребовало введения ряда специальных понятий и лемм¹. Так, Гауссу пришлось заново строить теорию симметрических функций и доказывать их алгебраическую независимость. Это дало ему возможность ввести новый способ доказательства, получивший впоследствии (у Кронекера, Кенига и др.) название принципа Гаусса. Соотношение между элементарными симметрическими функциями

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = 0$$

может быть лишь тождественным. Пусть, например, дан полином, разлагающийся на линейные множители

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

и между его коэффициентами установлено какое-либо соотношение

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = 0.$$

В силу принципа Гаусса это соотношение останется верным при подстановке коэффициентов любого другого полинома $Q_n(y) = 0$. Таким образом, все соотношения между коэффициентами разложимых многочленов верны для коэффициен-

¹ См. И. Г. Башмакова. О доказательстве основной теоремы алгебры. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. X, стр. 257—304.

тов всех многочленов. Вслед за этим вводится понятие дискриминанта

$$P = \prod_{i,j=1}^n (x_i - x_j)$$

и доказывается ряд лемм, которые в силу их специального характера мы не будем здесь приводить.

Дальнейшее доказательство опирается на лемму: если

$$Q(u, x) = \prod_i (\lambda_i + \mu_i u + \nu_i x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и w — неопределенная величина, то

$$\theta\left(u + w \frac{\partial \theta}{\partial x}, x - w \frac{\partial \theta}{\partial u}\right)$$

делится на $\theta(x, u)$. Применяя эту лемму к многочленам, Гаусс получил известное тождество:

$$\theta\left(u + w \frac{\partial \theta}{\partial x}, x - w \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) = \theta(u, x) \theta_1(u, x, w, a_1, \dots, a_n),$$

где θ_1 — целая функция, рациональная относительно своих аргументов.

При помощи этого тождества Гаусс построил затем поле, в котором вспомогательный многочлен $\theta(u, x)$ имеет линейный множитель, а заданный многочлен — множитель второй степени.

Примерно через 50—60 лет Кронекер сумел использовать метод построения полей, данный Гауссом, и создать (1882)¹ конструкцию поля разложения для любого полинома. Оказалось, что если дан $P_n(x)$ — многочлен с коэффициентами из поля k , над которым уравнение $P_n(x) = 0$ неприводимо, то можно (не предполагая существования $K \supset k$) построить поле разложения, т. е. то минимальное поле, в котором

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Тогда основная теорема алгебры приняла вид: поле любого полинома (с вещественными или комплексными коэффициен-

¹ См. L. K r o n e c k e r. Werke, Bd. III, SS. 341—360; Bd II, SS. 247—300.

тами) есть подполе поля комплексных чисел или изоморфно этому подполю.

Другое из замечательных алгебраических открытий начала XIX в. — доказательство неразрешимости в радикалах уравнения пятой степени. Как мы указывали выше, поиски подходящей формы иррациональности для решения того или иного класса алгебраических уравнений сменились уверенностью, что, по-видимому, это невозможно. Задача обернулась; необходимым оказалось исследовать наиболее общие выражения, содержащие радикалы, с тем чтобы выяснить, могут ли они быть выражениями корней алгебраического уравнения пятой степени.

По этому пути и повел свои исследования в самом конце XVIII в. П. Руффини. В 1799 г. он опубликовал «Общую теорию уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени».

Но первый реальный успех выпал на долю скромного молодого норвежского математика Нильса-Генрика Абеля (1802—1829). За время своей короткой жизни он успел сделать так много открытий в математике, что по праву может считаться одним из наиболее выдающихся математиков XIX в. Начав с доказательства невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени, Абель произвел вслед за тем основополагающие исследования в области теории аналитических функций. Он также исследовал ряд классов специальных функций, в первую очередь эллиптических и гиперэллиптических.

Еще в школе (около 1820 г.) Абель заинтересовался проблемой разрешимости уравнений в радикалах. Одно время ему казалось, что он дал доказательство разрешимости в радикалах уравнения пятой степени. Вскоре выяснилось, что это доказательство содержало ошибку. Но ошибочное доказательство сослужило свою хорошую службу. Абель получил государственную стипендию и возможность поехать в Европу для усовершенствования в математике.

Исправленное доказательство появилось в 1824 г. в «Мемуаре об алгебраических уравнениях, где доказывается невозможность разрешимости общего уравнения пятой степени». В нем Абель, по-видимому независимо от Руффини, шел тем же путем; он стремился доказать, что наиболее общие выражения, содержащие радикалы, не могут быть корнями общего алгебраического уравнения пятой степени. Интересно, что это доказательство Абеля страдало тем же недостатком, что



Н. Г. Абель
1802—1829

и доказательство Руффини. Оно опиралось на предположение, что корни резольвенты должны рационально выражаться через корни данного уравнения.

Наконец, в 1826 г. в работе Абеля «Доказательство невозможности алгебраической разрешимости уравнений, степень которых превышает четвертую» многовековая проблема получила удовлетворительное разрешение. Здесь Абель рассматривал уравнения пятой степени с переменными коэффициентами. Решения он трактовал как выражения корней через алгебраические функции коэффициентов. Этот вид функций образуется из аргументов посредством конечного числа четырех арифметических операций и операции извлечения корня, показателем которого является простое число.

Громоздкое доказательство Абеля мы не имеем возможности полностью воспроизвести здесь¹. Оно начинается (§ 1) с построения наиболее общего вида алгебраических функций

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

где n — простое число, q_i — алгебраические функции того же порядка, что и v , но степени не выше, чем $m - 1$; p — алгебраическая функция порядка на единицу ниже, чем v , построенная так, что она не выражается рационально через $q_0, \dots, q_{n-1}$. Затем (§ 2) рассмотрены свойства алгебраических функций, удовлетворяющих данному уравнению, и доказано, что если уравнение алгебраически разрешимо, то его корню всегда можно дать такой вид, что все алгебраические функции, из которых он составляется, выражаются через рациональные функции корней данного уравнения.

Следующий параграф (§ 3) посвящен вопросу о подстановках и о числе различных значений, которые при этом могут принимать функции нескольких переменных. Здесь доказана теорема, известная как теорема Коши: если число различных значений v меньше p — наибольшего простого числа, не превосходящего n , — то оно не превышает 2. Отсюда получим результат, что не существует функции от пяти величин, имеющей три или четыре различных значения. Наконец (§ 4), показано, что никакое самое общее радикальное выражение не может быть универсальным выражением корней уравнения данной степени, большей чем четвертая.

Доказательства Абеля — Руффини не дают возможности выделить классы уравнений, разрешимых в радикалах. Они

¹ См. Н. Г. Чеботарев Теория Галуа, т. I. ГТТИ, М. — Л., 1936.

не снимают также возможности такой разрешимости для уравнений с численными коэффициентами подбором подходящих иррациональностей в конкретном случае. Исследования надо было расширять. Перед Абелем, как и в свое время перед Лагранжем, встала общая проблема разрешимости — основная проблема классической теории Галуа.

Лагранж нашел частный класс уравнений, разрешимых в радикалах, — циклические уравнения.

Абель в «Мемуаре об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений» (1829) вновь исследовал циклические уравнения, отыскав для них явные выражения корней через коэффициенты. Кроме того, он рассмотрел еще один класс разрешимых уравнений, которые по существу являются нормальными уравнениями с коммутативной (абелевой) группой Галуа.

Как в этой, так и в другой (оставшейся незаконченной и опубликованной лишь в 1839 г.) работе Абеля «Об алгебраической разрешимости уравнений» доказан ряд теорем, относящихся к теории Галуа. Например, Абель доказал теорему, эквивалентную теореме Галуа: чтобы неприводимое уравнение было разрешимо в радикалах, необходимо и достаточно, чтобы все корни были рациональными функциями двух известных корней. В других теоремах он исследовал структуру нескольких конкретных классов разрешимых групп. Фактически Абель исследовал структуру коммутативных групп. Он показал, что эти группы являются произведениями циклических групп. Однако понятие группы у него еще не было выделено.

Возникновение теории Галуа. Абель не смог дать общий критерий разрешимости уравнений с числовыми коэффициентами в радикалах. Но решение и этого вопроса не заставило себя долго ждать. Оно принадлежит Эваристу Галуа (1811—1832), французскому математику, скончавшемуся, как и Абель, в очень молодом возрасте. Его жизнь, короткая, но наполненная активной политической борьбой, страстный интерес к математическим занятиям представляют яркий пример того, как в деятельности одаренного человека накопленные предпосылки науки претворяются в качественно новый этап ее развития.

Галуа успел написать мало работ. В русском издании его работы, рукописи и черновые записи заняли лишь 120 страниц в книге маленького формата¹. Но значение этих работ

¹ См. Э. Г а л у а. Соч., ОНТИ, М. — Л., 1936.

огромно. Поэтому рассмотрим его замыслы и результаты подробнее.

Рассмотрим вслед за Галуа уравнение

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Для него определим область рациональности — совокупность рациональных функций от коэффициентов уравнения

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Область рациональности R является полем, т. е. совокупностью элементов, замкнутой по отношению к четырем действиям. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — рациональны, то R — поле рациональных чисел; если же коэффициенты — произвольные величины, то R есть поле элементов вида $\frac{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \dots, a_n)}$, где числитель и знаменатель — многочлены. Область рациональности можно расширить, присоединяя к ней элементы, например корни уравнения. Если к этой области присоединить все корни уравнения, то вопрос о разрешимости уравнения делается тривиальным. Задача разрешимости уравнения в радикалах может ставиться только по отношению к определенной области рациональности.

Галуа доказал, что для всякого уравнения $P_n(x) = 0$ можно в той же области рациональности найти некоторое уравнение $Q(x) = 0$, называемое нормальным. Корни данного уравнения $P_n(x) = 0$ и соответствующего нормального уравнения $Q(x) = 0$ выражаются друг через друга рационально. Нормальное уравнение — это уравнение, обладающее тем свойством, что все его корни рационально выражаются через один из них и элементы поля коэффициентов. Примером нормального уравнения будет уравнение: $x^n - 1 = 0$. Его корни:

$$x_1 = \xi, x_2 = \xi^2, \dots, x_n = \xi^n = 1.$$

Нормальным также будет являться, например, квадратное уравнение.

Все подстановки корней нормального уравнения образуют группу G . Это и есть группа Галуа уравнения $Q(x) = 0$, или, что то же самое, уравнения $P_n(x) = 0$. Она обладает, как выяснил Галуа, замечательным свойством: любое рациональное соотношение между корнями и элементами поля R инвариантно относительно подстановок группы G . Таким образом, Галуа связал с каждым уравнением группу подстано-



Э. Галуа
1811—1832

вок его корней. Он же ввел (1830) термин «группа» — адекватное современному, хотя и не столь формализованное определение.

Структура группы Галуа оказалась связанной с задачей разрешимости уравнений в радикалах. Чтобы разрешимость имела место, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая группа Галуа была разрешима. Это значит, что в данной группе существует цепочка

$$G \supset H_{p_1} \supset H_{p_2} \supset \dots \supset H_{p_k} (= E)$$

нормальных делителей с простыми индексами $p_1, p_2, \dots, p_k$. Напомним, кстати, что нормальные делители, или, что то же самое, инвариантные подгруппы H_i , — это такие подгруппы группы G , для которых справедливо $gH_i = H_i g$, где g — элемент группы G .

Общие алгебраические уравнения $P_n(x) = 0$ при $n \geq 5$, вообще говоря, такой цепочки не имеют, так как группы подстановок имеют только один нормальный делитель индекса 2 — подгруппу всех четных подстановок. Поэтому эти уравнения в радикалах, вообще говоря, неразрешимы.

Аппарат, введенный Галуа для установления разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, имел значение, выходящее за рамки указанной задачи. Его идея изучения структуры алгебраических полей и сопоставления с ними структуры групп конечного числа подстановок была плодотворной основой современной алгебры. Однако она не сразу получила признание.

Перед роковой дуэлью, оборвавшей его жизнь, Галуа в течение одной ночи сформулировал свои важнейшие открытия и переслал их другу О. Шевалье для публикации в случае трагического исхода. Это письмо было опубликовано вскоре после смерти Галуа, однако идеи, содержащиеся в нем, не нашли отклика. Только через 14 лет, в 1846 г., Лиувилль разобрал и опубликовал все математические работы Галуа. В середине XIX в. в двухтомной монографии Серре, а также в работе Э. Бетти (1852) впервые появились связные изложения теории Галуа. И только с 70-х годов прошлого века идеи Галуа начали получать дальнейшее развитие.

Это развитие происходило в разных направлениях. В области классической основы, наиболее близкой собственным идеям Галуа, новые задачи группировались вокруг проблемы классификации алгебраических иррациональностей и установления их арифметической природы. Сюда, например, относится теорема Кронекера — Вебера, что корни абелевых

уравнений (т. е. уравнений с коммутативной группой) с рациональными коэффициентами рационально выражаются через корни из единицы. Дальнейшие обобщения этой теоремы привели к общей теории полей классов, где речь идет о классификации всех абелевых расширений данного поля алгебраических чисел. Последнее является конечным алгебраическим расширением поля рациональных чисел. Современная теория алгебраических чисел сложилась как соединение теории этих чисел с теорией идеалов и теорией Галуа.

Постановка новых, более общих задач способствовала быстрому усложнению теории Галуа и росту общности ее результатов. Среди этих задач упомянем, например, проблему разыскания всех уравнений, которые для заданной области рациональности обладают определенной, наперед заданной группой. Проблемы такого рода привели к изучению полей общих рациональных функций (проблема Люрот—Штейница). Обобщения задачи о разрешимости уравнений в радикалах привели к проблеме общего характера о возможности сводить уравнение к цепочке вспомогательных уравнений с меньшим числом параметров. Первые общие результаты здесь были получены лишь советским математиком Н. Г. Чеботаревым в его теории резольвент. Другой советский математик—И. Р. Шафаревич в 1954 г. решил так называемую обратную задачу теории Галуа: для любой разрешимой группы любого порядка, если расширяемое поле κ_0 алгебраических чисел содержит корень n -й степени из единицы, всегда существует сколько угодно его расширений K , имеющих над κ_0 любую наперед заданную разрешимую группу n -го порядка.

Современная теория Галуа превратилась в сложную разветвленную математическую дисциплину, включающую в себя обширный материал о связях между свойствами уравнений, алгебраических чисел и групп¹.

Возникновение теории групп. Аппарат, введенный Галуа, в значительной степени опирается на понятие группы. Галуа же, по-видимому независимо от Руффини, ввел соответствующий термин. Плодотворность этого понятия и необходимость его введения были очевидны для многих математиков. Группы подстановок фактически рассматривал еще Лагранж. С 1815 г. Коши провел серию исследований по теории конеч-

¹ См. Н. Г. Чеботарев. Проблемы современной теории Галуа. В кн.: Э. Галуа. Соч., стр. 183—241; Н. Г. Чеботарев. Собр. соч., т. III. стр. 5—43; Н. Г. Чеботарев. Основы теории Галуа, тт. 1—2. Гостехиздат, М., 1934—1937.

ных групп, доказав, в частности, теорему о том, что каждая группа, порядок которой делится на простое число p , содержит по крайней мере одну подгруппу порядка p .

В первой половине XIX в. факты теории групп играли еще вспомогательную роль, главным образом в теории алгебраических уравнений. Складывающаяся теория групп была еще преимущественно теорией конечных групп — групп подстановок. К середине века выяснилось, что понятие группы имеет более широкое применение. В связи с этим в 50-х годах в работах Кэли и др. начало появляться более общее, абстрактное определение группы. Выяснилось, что наиболее важные свойства группы зависят не от характера элементов подстановки, а от групповой операции. Процесс перехода к абстрактной теории групп ускорился с 1870 г., после появления трактата К. Жордана «*Traité des substitutions et des équations algébriques*», где были подытожены результаты теории конечных групп в применении к теории чисел, теории функций и алгебраической геометрии.

К концу XIX в. теория конечных групп оформилась и достигла высокого уровня. Появился ряд сводных трактатов, содержащих ее систематическую разработку. В это же время появились первые приложения теории групп. В 1890—1891 гг. русский кристаллограф и геометр Е. С. Федоров и немецкий математик А. Шёнфлис независимо друг от друга решили методами теории групп задачу классификации всех кристаллических пространственных решеток. Они установили наличие 230 пространственных групп симметрии, состоящих из совокупности самосовмещений кристаллических структур. Точки, получаемые друг из друга преобразованием данной группы, называются гомологичными по отношению к этой группе и образуют так называемую правильную систему. В настоящее время исследование структуры кристаллических веществ включает в себя определение их федоровских групп.

Дискретные конечные группы, к которым принадлежат федоровские группы, получили распространение в теории многомерных пространств в связи с теорией правильных многогранников в них. В основе этих рассуждений лежит теорема Жордана: число конечных линейных групп заданного измерения существенно конечно. Та же теорема получила приложение на рубеже XIX—XX вв. в теории алгебраических интегралов линейных дифференциальных уравнений, римановых поверхностей и др. Например, Жордан указал на связь между линейными дифференциальными уравнениями, имеющими алгебраические интегралы, и конечными группа-

ми. Оказалось, что необходимым и достаточным условием существования алгебраических интегралов у линейного дифференциального уравнения фуксова типа является условие конечности группы линейных преобразований, претерпеваемых его интегралами при обходе независимой переменной вокруг каждой из критических точек.

К концу XIX в. теория конечных групп сформировалась настолько, что для нее приобрела актуальность проблема классификации. Однако в общем виде эта проблема не решена до сих пор. Чрезвычайные трудности возникают и при исследовании ее частных аспектов. Например, окончательно не решен вопрос о структуре и классификации конечных разрешимых групп. Оказалось также, что все известные простые некоммутативные конечные группы имеют четные порядки. Проблема Бернсайда: будет ли это свойство общим для всех групп этого класса — остается пока нерешенной.

При таком положении вещей в теории групп, когда выделено общее, абстрактное понятие группы, естественно, возникал вопрос об исследовании бесконечных групп, как непрерывных, так и дискретных, а также о создании вычислительного аппарата, приспособленного для нужд теории групп. Эти три группы вопросов были поставлены и получили продвижение в конце XIX — начале XX в.

Главные достижения здесь принадлежат ученикам К. Жордана — Ф. Клейну и С. Ли, которые предприняли систематическое изучение теории групп и ее возможных обобщений и приложений.

Норвежский математик Софус Ли распространил методы теории групп на проблему интегрирования дифференциальных уравнений. Он ввел около 1873 г. новый вид групп, названный им «непрерывные группы преобразований». С каждым дифференциальным уравнением он связал такую группу преобразований, которая оставляет его неизменным. Группы Ли состояли из преобразований вида

$$x \rightarrow f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

определяемых параметрами. Например, для вращения плоскости параметрами являются углы поворота, для пространства — так называемые эйлеровы углы. Перемножение двух преобразований, являющихся элементами группы, дает преобразование. Параметры последнего связаны с параметрами сомножителей непрерывными функциями.

$$F_i = F_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Группы, определенные таким образом, получили название групп Ли. Структура групп Ли оказалась связанной с вопросом об интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах. Соответствующие структурные свойства групп Ли получили, по аналогии с теорией Галуа, интерпретацию свойств разрешимости. С. Ли классифицировал всевозможные группы преобразований на плоскости и построил таблицу нормальных типов дифференциальных уравнений с указанием, решаются ли они в квадратурах. Вопрос, вытекает ли из непрерывности функций F_i существование таких параметров в группе, для которых функции F_i аналитичны, был включен Д. Гильбертом в число его знаменитых проблем и в настоящее время решен положительно¹.

Другое важное приложение теории непрерывных групп было осуществлено около 1872 г. Ф. Клейном. Позднее (в главе XI) будет рассказано о концепции Клейна, что любая из геометрий (евклидова, аффинная, проективная и т. д.) имеет в своей основе некоторую непрерывную группу преобразований и представляет собой по существу учение об инвариантах этой группы.

Открытие столь многообразных приложений теории непрерывных групп было причиной введения еще более общего, абстрактного определения непрерывной группы. В него входит требование задания предельного перехода, согласованного с группой операций. Вскоре удалось показать (это сделал Ван Данциг), что это определение более общее, нежели определение Ли, и что существуют непрерывные группы, не являющиеся группами Ли. Так как при этом определении отвлекаются от того, что элементы группы являются преобразованиями, то приходят по существу к топологической группе и к топологическому пространству. В связи с этим создалась настоятельная необходимость объединить отдельные топологические факты в единую теорию. Это было проделано А. Пуанкаре в его знаменитом мемуаре «*Analysis situs*» (1895) и в пяти прибавлениях к нему (1899—1911).

На рубеже XIX и XX вв. теория групп приобрела необычайную разветвленность, составив ядро современной алгебры. Ее составляет ряд высокоразвитых теорий: конечных групп, бесконечных дискретных групп, непрерывных групп, в том числе групп Ли. Теоретико-групповые методы проникли в ряд математических дисциплин и их приложений. Открытия

¹ См., например, Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. ГТТИ, М., 1954.

де Бройля, Шредингера, Дирака и др. в квантовой механике и в теории структуры материи показали, что современная физика должна опираться на теорию непрерывных групп, в особенности на теорию представлений групп линейными операторами, теорию характеров и др., разработанные Картаном, Г. Вейлем и другими учеными.

Прошло около половины столетия после работ Гаусса, Абеля и Галуа, а центр тяжести в алгебраических исследованиях переместился в теорию групп, подгрупп, колец, структур. В алгебре вступил в свои права период современной математики.

Некоторые другие пути формирования современной алгебры. Из богатой и разнообразной истории алгебры XIX в. мы выделили сравнительно небольшую область формирования некоторых основных понятий. Это сделано потому, что в выделении немногих алгебраических объектов — группы, поля, а позже кольца и структуры — и в создании соответствующих теорий отражается главное содержание изменений, происшедших в алгебре в течение XIX — начала XX в. Эти изменения предопределили основные направления развития алгебры в первой половине XX в.

Более обстоятельное исследование истории создания современной алгебры связано с решением нескольких историко-математических задач.

Во-первых, необходимо проследить обогащение теории групп, а также теории других основных алгебраических понятий фактическим материалом, позволяющим полнее раскрывать их свойства. Так, наряду с историей конечных и непрерывных бесконечных групп большой интерес в силу их важности для приложений вызывают бесконечные дискретные группы.

Во-вторых, перед исследователями встает задача раскрытия связей теории групп (а также теории полей, колец и структур) с другими математическими дисциплинами. Например, наметившееся внедрение теоретико-групповых рассуждений в область топологических свойств привело к тому, что теперь каждый топологический образ характеризуется в известной мере своей фундаментальной группой, в общем случае — бесконечной. Особенно велика, по-видимому, роль теории групп в теории узлов, частным случаем которых являются косы. Среди многих задач, которые здесь предстоит решить, можно назвать, например, задачу подробного выяснения такого обстоятельства, что в топологических образах

фундаментальные группы несут, по-видимому, функции, сходные с функциями групп Галуа в алгебраических полях.

История алгебры XIX в. будет неполной, если исследователь не обратит внимания, в-третьих, на формирование линейной алгебры, выраставшей из теории систем линейных уравнений и связанной с ней теории определителей и матриц. Во второй половине XIX в. велись весьма активные исследования теории инвариантов уравнений, т. е. выявления функций их коэффициентов, сохраняющих свои значения при том или ином заданном классе преобразований. На этом пути развития выросла более общая теория форм, нашедшая применение не только в алгебре, но и в других областях математики: теории чисел, дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии, механике и др., а также в их приложениях.

Мы не смогли, наконец, выделить место для освещения истории гиперкомплексных числовых систем Гамильтона и Грассмана, созданных в 1830—1840 гг., и для богатой совокупности средств изучения векторных пространств, играющих ныне столь важную роль в исследовании различных, казалось бы, математических теорий с единых, весьма общих позиций.

ГЛАВА. VIII

ПЕРЕСТРОЙКА ОСНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В XIX в.

Усиление роли теории пределов. Математический анализ к XIX в. развился в разветвленную систему дисциплин, продолжая занимать центральное место в математике. Неиссякающий поток новых теоретических результатов и непрерывно расширяющаяся область приложений обусловили то, что в общей структуре математики особое место заняли именно аналитические дисциплины.

Математическое естествознание обогащало свое содержание главным образом за счет анализа, в первую очередь дифференциальных уравнений. Методы анализа глубже проникли в физику, захватив помимо механики и оптики теорию электрических, магнитных и тепловых явлений. В механике были подвергнуты разработке кроме точек и их систем непрерывные среды. Разнообразные области техники: паровые машины, артиллерия, техника строительства и др. — получали новые методы аналитического исследования важнейших задач. В связи с этим структура и содержание математического анализа подверглись глубокой перестройке.

Стандарт логической строгости, сложившийся в математическом анализе во второй половине XVIII в., отставал от приложений. Работа по обоснованию этой области математики, проделанная Эйлером, Даламбером, Лагранжем и др., не привела к преодолению отставания. Теоретические исследования требовали новых, более тонких аналитических методов, опирающихся на ясные и строго определенные исходные положения. Задача критического пересмотра системы определений и логических приемов доказательств приобрела для

математического анализа еще большую актуальность. От ее решения зависело теперь слишком много. Поэтому исследования, имеющие целью обосновать математический анализ, занимали в математике XIX в. весьма заметное место.

В современной структуре математического анализа одно из центральных мест принадлежит понятию предела. Его значение огромно. На него опирается практически весь аппарат инфинитезимальных доказательств, характеризующийся гипотетико-дедуктивными суждениями и применением специфических неравенств (этот аппарат мы выше условно назвали: ϵ , δ -аппарат).

Выше было показано также, что понятия предела и перехода к нему фактически существуют в математике с давних пор. Первоначальная теоретическая форма предельных суждений имела еще у древних греков в виде метода исчерпывания. Мы не находим в этом методе еще ни понятия предела, ни единой отражающей сущность этого понятия символики. Однако единообразное проведение метода с обязательным, хотя и неявно осуществляемым предельным переходом дало нам возможность увидеть в нем неразвитую форму позднейшей теории пределов.

Вплоть до Ньютона в истории математики можно отметить лишь наличие отдельных фактически производимых предельных переходов, совокупность которых медленно расширяется. Ньютону мы обязаны первой попыткой развить теорию пределов как логическую основу созданного им в виде теории флюксий дифференциального и интегрального исчисления. Он же ввел специальный термин: *limes* (предел), не давая ему формального определения, по-видимому как интуитивно ясному. Теория Ньютона опубликована в его знаменитых «Математических началах натуральной философии». Здесь она носила название «метода первых и последних отношений», и об этом методе утверждалось, что с его помощью все последующее доказывается. Однако метод первых и последних отношений не давал оперативной основы для практического пользования бесконечно малыми. Ньютон также не смог преодолеть трудности, связанные с определением отношения исчезающих или зарождающихся величин.

Математики XVIII в. испробовали множество способов обоснования анализа бесконечно малых. Неудовлетворительность почти всех этих способов быстро делалась очевидной. Только по отношению к методам, основанным на понятии предельного перехода, критика не обнаруживала существенных логических пробелов и несообразностей. Сборники ме-

тогда пределов: Даламбер, Люилье, Гурьев и др. — с большой настойчивостью отстаивали его, разъясняя роль и смысл понятия предела. Так, Даламбер писал по этому поводу, что Ньютон видел в дифференциальном исчислении только метод определения пределов отношений. Он никогда не дифференцировал величины, а только уравнения, так как всякое уравнение включает в себе отношения между переменными, а решение дифференциальных уравнений состоит только в определении пределов отношений между конечными разностями содержащихся в уравнении переменных.

Однако Даламбер не смог противопоставить лейбницескому отбрасыванию бесконечно малых при дифференцировании какой-либо рациональный метод, основанный на предельных рассматриваниях. Рекомендованный им прием можно коротко записать формулой

$$y' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Big|_{h=0}.$$

В этом приеме явно предполагается разложимость функции в ряд; кроме того, в нем по существу еще нет операций с пределами.

Подобные определения понятия предела и связанных с ними понятий могли служить лишь для объяснения, истолкования, наконец, оправдания правильности результатов анализа бесконечно малых. Так они и воспринимались. Но для внедрения в анализ предельных рассматриваний требовалось большее: чтобы они служили средством разработки стоящих перед этой наукой проблем, вошли в его оперативную практику. На этом пути предстояло преодолеть большие трудности, связанные: а) с необходимостью определять существование пределов; б) с отсутствием алгоритма вычисления пределов; в) с отсутствием математического выражения пределов, позволяющего оперировать с ними, и соответствующей символики.

Первая из указанных трудностей (не говоря уже об остальных) отнюдь не носила абстрактно-теоретического характера, как это могло бы показаться. В математике накопилось большое количество проблем, решение которых сводилось к решению вопросов существования. Таковы, например: а) вопрос о существовании корней алгебраических уравнений; б) о существовании сумм бесконечных рядов чисел; в) о существовании сумм бесконечных рядов функций; г) о существовании интегралов функций как действительного, так и комплексного переменного. Для решения всех этих проб-

лем совокупность известных предельных переходов, индивидуально определенных ранее, была совершенно недостаточна.

В конце XVIII — начале XIX в. сочинения большого числа математиков отражали уже, с различной степенью решимости и последовательности, объективную необходимость построения теории пределов как основы математического анализа и коренной перестройки последнего. Наибольшие заслуги в осуществлении этого принадлежат О. Коши.

Деятельность О. Коши в области обоснования математического анализа. Процесс перестройки оснований математического анализа на базе теории пределов отчетливо проявился в 20-х годах XIX в., прежде всего в знаменитых лекциях О. Коши, которые он читал в Политехнической школе в Париже.

Коши, Огюстен-Луи (1789—1857), окончил в 1807 г. Политехническую школу в Париже. Это учебное заведение, открытое в 1794 г., во время Великой французской буржуазной революции для подготовки военных инженеров, сделалось впоследствии основным источником пополнения руководящих инженерных кадров страны. В течение двух лет питомцы Политехнической школы получали основательную подготовку по математике, механике и черчению. Затем их направляли для приобретения специальных инженерных знаний на два года в одно из четырех учебных заведений: Институт путей сообщения, Горный институт и в высшие военные училища: инженерное и артиллерийское. Лучшие из оканчивающих имели право выбора. Как правило, они попадали в первый из упомянутых институтов, пользовавшийся наиболее высокой репутацией. Дальнейшее распределение по институтам также происходило в соответствии с учебными успехами. Коши учился в Институте путей сообщения, а затем (до 1813 г.) работал инженером.

С 1816 г. Коши был назначен членом Академии и профессором Политехнической школы, где работал вместе с другими лучшими математиками Франции. Однако с 1830 до 1838 г. Коши вынужден был находиться в эмиграции в силу своих религиозно-монархических убеждений и оппозиции республиканскому строю. По возвращении во Францию он преподавал в иезуитском колледже и только в 1848 г. стал профессором Сорбонны — Парижского университета.

Научная продуктивность Коши была исключительной. Биографы насчитывают 789 опубликованных им работ. Наибольшее их число относится к различным областям математического анализа и его приложений. В последующем



О. Коши
1789—1857

(глава X) мы будем иметь возможность осветить вклад Коши в теорию функций комплексного переменного, систематическое построение которой является в значительной степени делом его рук. В настоящей главе, чтобы не нарушать цельности изложения, мы не остановимся также на заслугах Коши в области дифференциальных уравнений: постановка задачи Коши, основные теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных, метод мажорант и метод характеристических полос для интегрирования уравнений с частными производными первого порядка (об этом см. в главе IX). По-видимому, в настоящей книге мы не сможем вообще дать характеристику работ Коши по геометрии, теории чисел, алгебре, теории упругости и оптике и воссоздать атмосферу интенсивного творчества Коши и его огромного авторитета среди ученых-математиков. Здесь, как и повсюду в тексте, мы вынуждены жертвовать персональным аспектом вопроса и ограничиваться лишь краткими биографическими сведениями, не претендуя на составление научной биографии.

В Политехнической школе Коши читал лекции по математическому анализу. Весь курс лекций был опубликован в трех книгах: «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (2 тома, 1826, 1828). Эти книги имеют особое значение потому, что в них впервые математический анализ последовательно строится на основе теории пределов. Они знаменуют начало коренной перестройки основ этой науки — перестройки, непосредственно предшествующей ее современному состоянию.

«Курс анализа» Коши, называемый иногда «Алгебраическим анализом» (в соответствии с текстом подзаголовка), посвящен изучению элементарных функций как вещественного, так и комплексного переменного, включая учение о бесконечных рядах. В этом отношении Коши следовал установившимся в XVIII в. благодаря Эйлеру традициям: предпослать собственно дифференциальному и интегральному исчислению учение о функциях. Значение такого сочинения в структуре анализа очевидно. Классификация функций, разложение их в степенной ряд, в бесконечные произведения, частные приемы преобразования функций необходимы для успешного применения к ним операций дифференцирования и интегрирования. Последние два вида операций рассматривались как специфические для анализа бесконечно малых. Все предшествующие им преобразования функций, хотя и совершаемые как

над конечным, так и над бесконечным числом объектов, получили поэтому специфически-смешанное название: «Алгебраический анализ».

Алгебраический анализ Коши уже во многом напоминает современное изложение основ математического анализа. В нем впервые вводится бесконечно малая величина как переменная, предел которой равен нулю. Непрерывность функции рассматривается как наличие соответствия бесконечно малого приращения функции бесконечно малому приращению аргумента. С большой тщательностью изложен вопрос о сходимости бесконечных рядов, существование которой обуславливается наличием предела сумм конечного числа членов с обязательной строгой аналитической оценкой остаточного члена.

Чтобы распространить понятие сходимости на возможно более широкие классы рядов, Коши связал сходимость знакопеременных рядов со сходимостью рядов, составленных из модулей их членов. Относительно абсолютной сходимости, введенной таким образом, он доказал ряд теорем, например теорему о том, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению их сумм.

Коши поставил на достаточно прочную основу исследование признаков сходимости рядов. Этому предшествовали лишь немногие открытия: интегральный признак (Маклорен, 1742) и недостаточно строго сформулированный признак Даламбера (1768). В лекциях Коши указан ряд достаточных признаков сходимости.

За этими результатами Коши последовал длинный ряд исследований, имеющих целью выработать наиболее общие и чувствительные признаки сходимости рядов. Полное исследование условий сходимости ряда на комплексной плоскости дал в 1826 г. Абель. Новые достаточные признаки, вошедшие затем в учебные курсы, нашли Й. Раабе (1832), Н. Лобачевский (1834), Э. Куммер (1835), Бонне (1842), Бертран (1842), В. П. Ермаков (1870) и др. Определенный итог всем частным попыткам отыскания признаков сходимости подвел Н. В. Бугаев (1863 и 1888), введший теорию сопряженных рядов, позволившую охватить с единых позиций множество признаков. Теория рядов обогатилась в лекциях Коши установлением области сходимости степенных рядов

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

как для действительных, так и для комплексных значений аргумента. Для последних определен (в 1844 г.) круг сходи-

мости и выведена теорема, известная ныне как теорема Коши — Адамара: ряд сходится (соответственно, расходится), если

$$|z| \leq \rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Разъяснено, что если $\lambda = 0$, то ряд сходится на всей плоскости; если $\lambda = \infty$, то область сходимости исчерпывается единственной точкой; наконец, условие $0 < \lambda < \infty$ означает, что ряд сходится внутри круга радиуса $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ и расходится вне его.

К сожалению, у Коши нет еще представления о равномерной сходимости ряда в интервале. Из-за этого в алгебраический анализ попала неправильная теорема: сходящийся ряд непрерывных функций в области сходимости представляет сам непрерывную функцию. Вскоре (1826) эту ошибку, впрочем, отметил и исправил Абель. Понятие равномерной сходимости было введено в 1848 г. Дж. Стоксом и Л. Зейделем.

То же стремление перестроить весь анализ на основе теории пределов выражено во второй книге Коши — «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823). В ней изложено дифференциальное и интегральное исчисление функций действительного переменного. Об особенностях структуры этой книги, вытекающих из поставленной цели, в книге говорится: «Моей главной целью было согласовать строгость, которую я вменял себе в обязанность в изложении моего курса анализа (имеется в виду алгебраический анализ. — *К. Р.*), с простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых количеств. По этой причине я считал долгом отвергать разложения функций в бесконечные ряды во всех случаях, когда полученные ряды не сходятся, и я был вынужден отнести к интегральному исчислению формулу Тейлора, так как формулу эту можно считать общей лишь тогда, когда содержащийся в ней ряд сведен к конечному числу членов и дополнен определенным интегралом (речь идет об интегральной форме остаточного члена. — *К. Р.*).

Я знаю, что знаменитый автор Аналитической механики (Лагранж. — *К. Р.*) взял формулу, о которой идет речь, в качестве основы своей теории производных функций. Но, несмотря на все почтение, внушаемое таким большим авторитетом, большая часть геометров (так в ту пору называли всех математиков. — *К. Р.*) согласно признает теперь недостоверность результатов, к которым можно прийти, употребляя рас-

ходящиеся ряды; мы прибавим, что во многих случаях теорема Тейлора как бы дает разложение функции в сходящийся ряд, хотя сумма этого ряда существенно отличается от предложенной функции. Впрочем, я надеюсь, что читатели моего сочинения убедятся в том, что принципы дифференциального исчисления и его важнейших приложений могут быть легко изложены без помощи рядов»¹.

Далее следуют лекции по дифференциальному исчислению, весьма уже сходные с привычным нам изложением. Впечатление сходимости усиливается, когда мы встречаем критерий сходимости последовательностей (критерий Больцано—Коши): члены сходящейся последовательности с достаточно большими индексами должны сколь угодно мало отличаться друг от друга. Здесь еще нет ε , δ -аппарата (для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для всех $n, m > N$), но существо дела уже выражено. Для дифференциального исчисления Коши характерно также систематическое применение теоремы о среднем значении:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

эпизодические упоминания о которой были известны ранее и которую впервые применил Лагранж (1804) для вывода ряда с приближенным выражением остаточного члена. Мы не будем излагать здесь эту часть курса лекций Коши более подробно.

В области интегрального исчисления курс лекций Коши отличался коренным образом от курса Эйлера и других предшественников. Его своеобразие прежде всего проявилось в выборе основного понятия. Это было понятие определенного интеграла.

Новым было и появление в начале лекций аналитического доказательства существования определенного интеграла от непрерывной функции. Доказательство это носит все черты позднейших доказательств теорем существования. Ход мыслей здесь таков: задается функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[x_0, X]$. Этот отрезок делится на n частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Составляется сумма

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i),$$

¹ O.-L. Cauchy. Résumé des leçons donnés sur le calcul infinitesimal. Oeuvres, ser. 2, vol. IV. Paris, 1829, p. 263.

и относительно нее доказывалось, что $S \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta x_i \rightarrow 0$. Величина интеграла A предстает как функция от крайних значений отрезка интегриации и функции $f(x)$.

Заметную часть лекций по интегральному исчислению заняли разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена. Точной оценке остаточного члена и выводу его различных аналитических форм Коши уделил много места и в других своих исследованиях. В лекциях Коши приведен широко известный и ныне пример функции

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0;$$
$$f(x) = 0, \quad x = 0,$$

соответствующий ряд для которой в точке $x=0$ сходится, но не к данной функции. Тем самым он провел отчетливое различие между вопросами о сходимости рядов Тейлора вообще и о сходимости к данной функции.

Указанные лекции Коши (третья часть их посвящена геометрическим приложениям математического анализа) имели очень широкое последствие. Теория пределов через их посредство начала завоевывать положение основы всего анализа. Эта идея постепенно получала распространение.

Усовершенствование Б. Больцано основ теории функций. Более глубокое исследование основ математического анализа требует, как теперь известно, привлечения методов и фактов теории множеств и теории функций действительного переменного. Основы такого исследования были заложены также еще в первой половине XIX в. Главные заслуги в этой области (о чем стало известно позднее) принадлежат Бернарду Больцано (1781—1848), выдающемуся чешскому ученому. С 1805 до 1820 г. он преподавал богословские дисциплины в Пражском университете. За выступления в пользу национальной самостоятельности чешского народа и против владычества австрийской монархии он был отстранен от преподавания. Ему было запрещено поступать на государственную службу, выступать устно и в печати. Без средств к существованию Больцано прожил остаток жизни в деревне у друзей, продолжая любимые с юношеских лет занятия математикой и философией.

Философские и математические исследования Больцано всегда были тесно связаны. Он видел в выработке математического мышления необходимую предпосылку для более, как правило, сложных философских суждений. В работе



Б. Больцано
1781—1848

«К более обоснованному изложению математики» он так сформулировал цели своих математических исследований: «В течение примерно пятнадцати лет эта наука всегда была одним из моих излюбленных занятий; однако, преимущественно лишь в ее спекулятивной части, как ветви философии, и как средства упражнения в правильном мышлении. Сразу же, при первом ознакомлении с ней, что произошло по превосходному учебнику Кестнера, мне стали заметны один-два недостатка, устранением которых я стал заниматься в свои свободные часы, уверяю, не из тщеславия, а из-за внутреннего интереса, который я находил в таких спекуляциях. При более продолжительном размышлении число недостатков, которые я, как мне казалось, обнаружил, еще увеличилось»¹.

Более или менее полная характеристика математического творчества Больцано выходит за пределы поставленных перед настоящей главой задач. Обратим внимание лишь на логический анализ содержания основных понятий и методов доказательств, далеко продвинутую формализацию суждений, которые позволили Больцано в области анализа сделать ряд важных открытий, опередив современную ему науку. Исключительно неблагоприятные условия, в которых жил и работал Больцано, были причиной того, что почти все его работы увидели свет лишь после его смерти. Основные его результаты стали известны лишь в 70-х годах, а признание начали получать с 80-х годов. Рукопись его важнейшего сочинения — «Учения о функциях» — была обнаружена лишь в 1920 г., а опубликована, с примечаниями К. Рыхлика, лишь в 1930 г., т. е. ровно через сто лет со времени ее написания. Об этом обстоятельстве можно лишь пожалеть. Больцано в области обоснования анализа сделал многое раньше Коши и тем более Вейерштрасса. Будь его работы опубликованы, ход событий в этой области был бы, видимо, ускорен.

В самом деле, еще в 1817 г. Больцано сформулировал и доказал теорему, что если множество вещественных чисел ограничено сверху (соответственно, снизу), то оно имеет точную верхнюю (соответственно, нижнюю) грань. Тем самым он опередил Вейерштрасса, сформулировавшего эту теорему после 1860 г. Тогда же, за несколько лет до Коши, Больцано вывел критерий сходимости последовательностей и дал строгое определение непрерывности функций. Он глубоко изучил свойства непрерывных функций и доказал относительно них ряд

¹ Цит. по кн.: Э. Кольман. Бернхард Больцано. Изд-во АН СССР, М., 1955, стр. 35.

замечательных теорем и, в частности, следующую: непрерывная функция принимает все промежуточные значения, лежащие между двумя ее различными значениями. Ему же принадлежит введение односторонней непрерывности.

Больцано опроверг общепринятое мнение, сформулированное в 1806 г. Ампером, что непрерывные функции имеют лишь, быть может, изолированные особенности. В геометрическом плане это означает, что всякая непрерывная кривая должна иметь касательные всюду, за исключением, быть может, отдельных точек. Больцано расширил класс непрерывных кривых, применив метод накопления особенностей, и получил на этом пути много своеобразных функций, в том числе функцию, не имеющую производной (соответственно, касательной) ни в одной точке и известную нам теперь как функция Больцано.

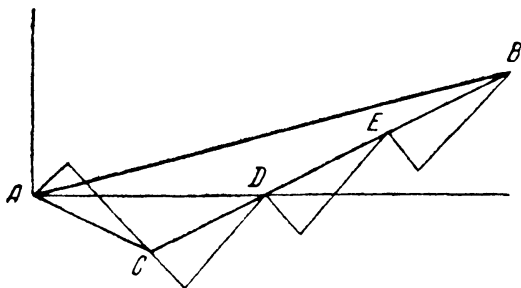


Рис. 10

В применении к построению функции Больцано $B(x)$ метод накопления особенностей состоит в следующем. Строится $B_0(x)$ — отрезок прямой между точками, например $A(0, 0)$ и $B(a, h)$. Затем строится $B_1(x)$ — ломаная $ACDEB$, где

$$C\left(\frac{a}{4}, -\frac{h}{4}\right), D\left(\frac{a}{2}, 0\right), E\left(\frac{3a}{4}, \frac{h}{2}\right).$$

$B_2(x)$ получится повторением предыдущей операции на каждом из указанных четырех отрезков. n -Кратное повторение этой операции дает ломаную $B_n(x)$. Функция Больцано $B(x)$ в точках вида

$$x = \frac{ka}{4^n}$$

($0 \leq k \leq 4^n$, k — целое, $n=0, 1, 2, 3, \dots$) определяется как совпадающая с $B_n(x)$. На множестве $\{x\}$, отличных от $t = \frac{ka}{4^n}$,

$$B(x) = \lim_{t \rightarrow x} B(t).$$

Функция Больцано непрерывна, но не имеет конечной производной ни в одной точке. В самом деле, колебание $B_n(x)$ на отрезках

$$\left(\frac{ka}{4^n}, \frac{(k \nrightarrow 1)a}{4^n} \right)$$

будет

$$\omega_n \left(\frac{ka}{4^n}, \frac{(k \nrightarrow 1)a}{4^n} \right) = \frac{h}{2^n}.$$

Однако колебание $B_n(x)$ для любого отрезка $\frac{a}{4^n}$

$$\omega \left(x, x + \frac{a}{4^n} \right) > \frac{h}{2^n}, \quad (3)$$

так как внутри этого отрезка попадет хоть один промежуток из числа полученных при делении промежутка $(0, a)$ на 4^{n+1} равных частей. Поэтому всегда можно выбрать такое $\Delta x > 0$, чтобы одновременно

$$\Delta x < \frac{a}{4^n}, \text{ и } |B(x + \Delta x) - B(x)| \geq \frac{h}{2^{n+1}}.$$

Действительно, пусть на сегменте $[x, x + \frac{a}{4^n}]$ наибольшее и наименьшее значения $B(x)$ будут: M и m . В соответствии с (3)

$$M - m > \frac{h}{2^n}.$$

Поэтому будет иметь место хотя бы одно из неравенств:

$$M - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}$$

$$B(x) - m > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}.$$

Пусть, например,

$$M - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}.$$

Тогда на отрезке $\left[x, x + \frac{a}{4^n} \right]$ найдется x' такое, что

$$B(x') = M,$$

и поэтому

$$B(x') - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}$$

и одновременно

$$\Delta x = x' - x < \frac{a}{4^n}.$$

В таком случае

$$\frac{B(x + \Delta x) - B(x)}{\Delta x} \geq \frac{h}{a} \cdot 2^{n-1}$$

и $B(x)$ в отрезке $[0, a]$ не имеет конечной производной¹.

Кривая Больцано была найдена во всяком случае до 1830 г. Однако долгое время считалось, что первые примеры непрерывной недифференцируемой функции дали в 1875 г.: а) Вейерштрасс

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

$\left(0 < a < 1, b — \text{целое нечетное число, } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right),$

б) Дарбу

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin[(k+1)! \pi x].$$

В «Учении о функциях» Больцано построены и исследованы и другие сложные функции. Он изучил непрерывные функции, имеющие бесконечное множество экстремумов. Таковы, например: ломаная с угловыми точками

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, 0\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{15}{16}, 0\right), \dots, \\ \left(\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n-1}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}}, 0\right), \dots$$

непрерывная в $[0, 1]$ и имеющая в $x=1$ разрыв; функция

$$f(x) = \sin \log(1-x)$$

на $[0, 1]$ и др.

Исследованию у Больцано подверглись и разрывные функ-

¹ См., например, В. Ф. Б р ж е ч к а. О функции Больцано. «Усп. матем. наук», IV, 2(30), 15—21, 1949.

ции. Он построил функцию $\Phi(x)$, которая на $[-1; +1]$ принимает все значения от -1 до $+1$ и имеет разрыв в каждой точке этого сегмента, определив ее следующим образом:

$$\Phi(x) = x \text{ для } x \text{ вида } \frac{2m+1}{2^n},$$

$$\Phi(0) = -1,$$

$$\Phi(-1) = 0,$$

$$\Phi(x) = -x \text{ для всех остальных } x.$$

Другим примером может служить монотонная функция, имеющая бесконечное множество разрывов. Она задана последовательностью отрезков, соединяющих точки:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{6}{4}\right), \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{13}{8}\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{14}{8}\right), \left(\frac{15}{16}, \frac{19}{16}\right), \dots$$

В сочинениях Больцано и в особенности в его «Учении о функциях» содержится большое число результатов, позднее вошедших в состав теории функций действительного переменного. Более того, в сочинении «Парадоксы бесконечного», написанном Больцано в последние годы жизни и увидевшем свет в 1851 г., мы встречаем существенные суждения позднейшей теории множеств. Так, дано обычно приписываемое Дедекинду определение бесконечного множества как такого, которое равномощно своей правильной части. Высказан принцип, что всякое бесконечное множество точек на сегменте имеет по меньшей мере одну предельную точку. В позднейшее время возобновилась (в переводах и с примечаниями К. Рыхлика) публикация материалов из научного наследия Больцано, что дает возможность полнее охарактеризовать его научные достижения.

Построение теории действительного числа и теории множеств. К половине XIX в. была разработана теория пределов, построены элементы современной теории функций и теории множеств. Однако теория пределов получила признание не сразу. Крупнейшие математики Европы не использовали этот метод в своих работах (например, Пуассон), предпочитая лейбницевское исчисление бесконечно малых. Английские математики в большинстве долго не воспринимали идей Коши, равно как и общепринятой теперь символики анализа бесконечно малых, введенной Лейбницем, видя в этом чуть ли не

оскорбление памяти великого Ньютона. Не было недостатка и в критиках теории пределов (например, Курно).

При ближайшем рассмотрении этого кажущегося странным обстоятельства оказывается, что большинство критиков теории пределов принадлежало к математикам, чьи работы были посвящены, в основном или в большинстве, приложениям. Содержание критики с течением времени определилось в двух направлениях. Во-первых, было обращено внимание на то, что с понятием предела нельзя было связать никакого алгоритма его нахождения. Многие понятия не могли быть признаны из-за их описательности, отсутствия количественных оценок. Таковы, например: «приближаться неограниченно», «сколь угодно малое», «последнее отношение бесконечно малых приращений» и т. д. Основное для теории пределов понятие устремления означает апелляцию к интуиции движения. В силу этих недостатков применение теории пределов, особенно в задачах практического характера, было в глазах многих современников Коши необычайно и неоправданно затруднительно.

Во-вторых, в теории пределов были обнаружены логические пробелы, устранить которые ее защитникам не удавалось. Примером такого пробела может служить определение вещественного числа. Последнее определялось как предел последовательности рациональных чисел. Например, $\sqrt{2}$ рассматривался как предел последовательности его неполных извлечений: 1; 1,4; 1,41; 1,414 Но для того чтобы так определять это число, надо предполагать существование его, т. е. совершать логически порочный круг в суждениях. Неясным оставалось также понятие бесконечной совокупности элементов, к которому приходилось прибегать. Наконец, неразработанность теории функций, которую преодолевал неизвестный в то время Больцано, приводила математиков к ошибкам, вроде упоминаемых выше убеждений, что непрерывности функции достаточно для ее геометрической представимости и существования производной почти всюду или что сходящийся ряд непрерывных функций представляет сам непрерывную функцию.

Таким образом, в течение около 30 лет трудности в обосновании анализа сдвинулись. Они выражались теперь в острой необходимости: а) построения строгой теории действительного числа, б) разъяснения и включения в математику понятия бесконечного множества, в) выявления полного объема класса непрерывных функций и включения в общую классификацию возможно более широкого класса разрывных

функций. От преодоления этих трудностей зависели дальнейшие успехи математического анализа.

И вот в 1872 г., в один и тот же год, появился ряд примечательных работ. В журнале «*Mathematische Annalen*» была опубликована первая из работ Г. Кантора об основаниях арифметики. Вышло в свет сочинение Р. Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа». Появились работы на эту тему Е. Гейне и Ш. Мерэ¹. Все эти сочинения преследовали единую цель: дать строгую теорию действительного числа. Тот же вопрос в течение ряда лет разрабатывал Вейерштрасс в знаменитых лекциях об аналитических функциях.

В указанных многочисленных исследованиях появились разновидности теории вещественного числа, удовлетворяющие высоким требованиям строгости. Дедекинду определял действительные числа как сечения во множестве рациональных чисел, дав совокупности всех действительных чисел (линейному континууму) геометрическую интерпретацию в виде прямой линии. Свойство непрерывности прямой, по Дедекинду, состоит в том, что при сечениях будет находиться либо самая правая точка одного класса, либо самая левая точка другого. Совокупность всех рациональных чисел свойством непрерывности не обладает. Тогда вводится иррациональное число (точка), как такое сечение множества рациональных чисел, в классах которого нет ни самого правого, ни самого левого числа (точки). Так у Дедекинда была введена совокупность всех действительных чисел, уже обладающая свойством непрерывности.

Канторово определение действительного числа идентифицирует последнее со сходящейся последовательностью рациональных чисел². Это определение, как и предыдущее, опирается на абстракцию актуальной бесконечности и основывается на анализе понятия непрерывности. Подход к определению непрерывности был различен. Дедекиндово определение базируется на упорядоченности множества рациональных чисел. Определение же Кантора включает рассмотрения разностей, расстояний между элементами, что соответствует природе понятия сходимости. Однако оба подхода к определению

¹ См. H. C. R. Meray. Ch. Nouveau précis d'analyse infinitesimal. Paris, 1872, éd Savy.

Е. Heine. Die Elemente der Functionlehre, Brorchardt J., LXXIV, 172—188 («*Journal für die reine und angewandte Math.*», 1872).

² См. И. В. Арнольд. Теоретическая арифметика. Учпедгиз, М., 1938, стр. 286.

непрерывности эквивалентны, поскольку вещественные числа строятся на основе системы рациональных чисел.

Воззрения берлинского профессора К. Вейерштрасса на природу действительного числа составляли часть его общего плана построения математического анализа, понимаемого в широком смысле, на возможно более строгих основах. Вейерштрасс ввел в математический анализ много важнейших результатов: систематическое использование понятий верхней и нижней грани числовых множеств, учение о предельных точках, обоснование свойства функции, непрерывной на отрезке, достигать своей верхней и нижней грани, построение функции, не имеющей производной ни в одной точке, доказательство возможности разложения непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов и др. В этой стройной и строгой системе математического анализа примерно к 1880 г. был выработан современный вид определений и аппарат доказательств, опирающийся на условно-дедуктивные суждения («пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда можно выбрать такое $\delta > 0$, что ...») и соответствующий символизм. Теория действительного числа служит Вейерштрассу (как и другим ученым) основой для всего здания математического анализа.

Вейерштрасс исходит при этом из множества положительных рациональных чисел $\{a_v\}$, которое он называет агрегатом. Агрегат обладает тем свойством, что сколько бы и какие бы элементы агрегата ни суммировались (речь всегда идет о конечном, хотя и сколь угодно большом числе элементов), их сумма не превышает заданных границ. Примером агрегата может служить любая десятичная дробь. Пусть заданы два агрегата $\{a_v\}$ и $\{a'_v\}$, идентифицируемые с числами b и b' . Берем адекватные части единицы $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$ или $n = 1, 10, 100, \dots$ все равно!). Может осуществиться один из трех случаев: а) перебирая элементы агрегатов, мы найдем, что $\frac{1}{n}$ повторяется одинаково часто; б) и в) для некоторого n величина $\frac{1}{n}$ чаще повторяется в первом (соответственно, втором) агрегате. Эти три случая соответственно означают $b = b'$, $b > b'$, $b < b'$. Объединение агрегатов дает сумму соответствующих чисел. Составление агрегата $\{a_v \cdot a'_\mu\}$, элементами которого являются всевозможные произведения элементов вида $\{a_v \cdot a'_\mu\}$, служит для определения умножения.

Все виды теории действительного числа опирались на рассмотрение множеств рациональных чисел. Этим самым трудности, связанные с обоснованием анализа, вновь сдвинулись. Они переместились в область логического анализа ряда натуральных чисел и вообще множеств с бесконечным числом элементов. В самом же анализе к концу XIX в. установился в основном современный стандарт логической строгости в определениях и доказательствах.

Создание теории бесконечных множеств и трансфинитных чисел принадлежит Г. Кантору, профессору университета в Галле. Серия его работ на эту тему последовала вслед за работами по теории действительного числа. Он доказал (1874) неэквивалентность множеств рациональных и действительных чисел. Через несколько лет (1878) в его трудах было введено общее понятие мощности множества, разработаны основы отображения и сравнения множеств и доказана равномощность множества точек линейного континуума и точек n -мерного многообразия. Систематическая разработка теории множеств была завершена Кантором в последующие пять лет (1879—1884). При этом он ввел понятие предельной точки, производного множества, пример совершенного множества, получившего его имя (1883), высказал континуум — гипотезу и т. п.

Развитие теории функций Вейерштрасса, теории множеств Кантора протекало в последние годы XIX столетия в обстановке острой критики и борьбы. Особенно острыми были выступления берлинского профессора Л. Кронекера, ученика Куммера. В вопросах оснований математики Кронекер, основные работы которого относились к алгебре и теории групп, был приверженцем арифметизации математики. Это означало стремление свести все трудности, связанные с обоснованием любой области математики, к натуральному ряду. Эта позиция Кронекера нашла свое яркое выражение в утверждении, которое он неоднократно повторял, что целые числа создал господь бог, а все остальное есть дело рук человеческих.

Разумеется, апелляция к верховному существу не означает ничего иного, как проявление идеализма, метафизической ограниченности и других несовершенств в философских воззрениях Кронекера. Кстати заметим, что эта узость и ограниченность воззрений (а Кронекер с большой страстностью отстаивал их) наносила большой ущерб научному творчеству самого Кронекера. Пуанкаре правильно указывал на это обстоятельство, шутливо добавляя, что Кронекер добился выда-



К. Вейерштрасс
1815—1897

ющих результатов в математике только потому, что он нередко забывал о своих философских убеждениях.

Построенная Кантором общая теория мощностей множеств, отображений, операций над множествами, свойств упорядоченных множеств составила впоследствии основное содержание абстрактной теории множеств. Понятие предельной точки и связанное с ним понятие замкнутости множества после введения в 1902 г. А. Лебегом понятия меры множеств и исследований Э. Бореля привели к созданию метрической теории множеств. Последняя послужила основой общей теории интегрирования и тригонометрических рядов. Позднее она привела к построению в работах А. Лебега, К. Каратеодори, Ф. Хаусдорфа и др. общей теории меры.

М. Фреше (1906) и Ф. Хаусдорф (1914), исследуя введенное Кантором понятие связности и другие примыкающие к нему, развили топологическую теорию множеств как теорию множеств, расположенных в общих метрических и топологических пространствах. Наконец, дискриптивная теория точечных множеств и связанная с ней весьма общая классификация разрывных функций (классификация Бэра) ведут свое начало примерно с 1900 г., от работ Р. Бэра и А. Лебега.

Теория множеств оказала огромное воздействие на развитие математики. Она явилась основой современной теории функций действительного переменного, топологии, алгебры и теории групп, функционального анализа и др. Методы теории множеств широко используются в большинстве математических наук современности. Это, однако, не означает сводимости всей математики к теории множеств. В самой этой теории еще при жизни Кантора обнаружились парадоксы, как, например, парадокс относительно существования множества всех множеств и др.

Вопросы обоснования теории множеств, исследования пределов ее применимости влились в XX в. в специальную науку — математическую логику, составляющую важную часть оснований современной математики. Эта часть математики (основания), включающая в себя совокупность философских, исторических и логических воззрений относительно содержания, формы и связей (в том числе внутренних взаимосвязей) математики, развивается в XX в. весьма бурно. Ее выводы получают практические приложения, отражая рост научной и технической практики человечества.

ГЛАВА IX

РАЗВИТИЕ АППАРАТА И ПРИЛОЖЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В XIX в.

Дифференциальные уравнения — основное оперативное средство анализа. Аппарат математического анализа к XIX в. представлял собой быстро разрастающуюся совокупность приемов и методов решения весьма уже многочисленных задач. Все эти методы можно еще было разделить на три большие группы, объединяемые в дифференциальном исчислении, интегральном исчислении и в быстро обособляющейся от последнего теории дифференциальных уравнений. Контуры формирующейся теории функций комплексного переменного, теории специальных функций и т. п. вырисовывались еще слабо.

Из многообразных приложений математического анализа мы выделим те, которые связаны с решением дифференциальных уравнений. Тем самым мы оставим в стороне сравнительно элементарные приложения, сводящиеся к дифференцированию или интегрированию функций, требуемому условиями задачи. Эти операции уже вошли в широкую, сравнительно доступную область практики. Однако возросшая сложность приложений нуждалась в более общих и мощных средствах. Таким средством явилась совокупность методов решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. Решение дифференциальных уравнений являлось главным оперативным средством анализа, а проблемы, связанные с этим решением — основными научно-практическими проблемами.

В выделенной нами области математического анализа ярко проявляется определяющее влияние задач математиче-

ского естествознания, в первую очередь механики и математической физики, и тесное взаимодействие теоретических и практических исследований. Вокруг решения проблем математической физики группируются сравнительно большие коллективы ученых, образуя научные школы. Крупнейшее из таких объединений сформировалось в Париже в Политехнической школе. Задачами математической физики здесь успешно занимались Пуассон, Фурье, Коши и др.

В Париже получили научную подготовку русские математики В. Я. Буняковский и М. В. Остроградский. Возвратившись в Россию, они явились зачинателями Петербургской математической школы, одним из главных направлений в которой была разработка методов решения задач математической физики.

Несколько значительных центров научного исследования в области прикладных методов анализа сформировалось в государствах Германского союза. В Берлине таким центром сделалась Берлинская политехническая школа, ведущая роль в которой принадлежала Л. Дирихле. С 20-х годов заметное место начал занимать Кенигсбергский университет, в связи с работами Ф. Неймана и его учеников по математической физике. Наконец, в Геттингене над созданием математического аппарата электромагнитных явлений много трудился К. Ф. Гаусс в сотрудничестве с Вебером.

Большая группа исследователей математических методов физики и механики имелась в Англии: Грин, Стокс, Томсон, Гамильтон, Максвелл и др. Усилиями столь большого количества ученых было достигнуто быстрое и значительное расширение области приложений математического анализа. Рассмотрим некоторые стороны этого процесса.

Создание аналитического аппарата для исследования электромагнитных явлений. Одной из первых успешно разрешенных задач была задача построения математической теории электромагнитных явлений. К XIX в. учение об электричестве и магнетизме выделилось в физике в самостоятельную область. В 1820 г. стало известным открытие Эрстедтом действия тока на магнитную стрелку, установившее общность разнородных, казалось бы, явлений. К тому же времени Био, Савар, Лаплас, Араго, Ампер, Кулон и др. ввели необходимые основные понятия: заряда, количества электричества, плотности электричества, законы взаимодействия неподвижных зарядов и т. д. Задачи электромагнетизма повлекли в математическом плане множество

работ по исследованию притяжений точек по закону Ньютона и электростатических полей.

Методы решения задач небесной механики, в частности задач о притяжении небесных тел по закону Ньютона, получили новую область применения. Переход в исследованиях от точечных центров притяжения к непрерывному распределению материи привел от рассмотрения потенциалов дискретного точечного поля к силовым полям, образованным телами или непрерывно распределенной материей. Было введено понятие потенциала поля и определено его выражение для простейшего поля, образованного заряженной точкой $A(a, b, c)$ массы m :

$$V_p = V(x, y, z) = \frac{\gamma m}{r}$$

(где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, γ — постоянная притяжения, $p(x, y, z)$ — притягиваемая точка). Вскоре же были найдены выражения потенциала для системы притягивающих точек, а затем для поля с непрерывным распределением притягивающих масс в объеме ω :

$$V_p(x, y, z) = \gamma \iiint_{(\omega)} \frac{\rho(a, b, c) d\omega}{r}$$

($\rho(a, b, c)$ — плотность распределения потенциала).

Еще в 1787 г. Лаплас показал, что в пространстве вне тела потенциальная функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Впрочем, это уравнение встречалось ещё у Эйлера, а понятие о силовой функции, дифференцирование которой по направлению давало бы ньютоновские силы притяжения, ввел в 1773 г. Лагранж, оформив тем самым идею силовой функции, которую высказывали еще Д. Бернулли, Эйлер и Клеро.

Математическая теория электрического потенциала сформировалась сравнительно быстро. Ряд задач о распределении электричества на поверхности проводников решил Пуассон, вообще основательно разработавший многие отделы современной ему математической физики: капиллярность, изгибание пластинок, электростатическую магнетостатику, теплопроводность. Около 1813 г. он распространил уравнение Лапласа на пространство, заключенное внутри притягивающего тела, и вывел широко известное теперь уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Пуассон решил много задач магнетостатики. При этом он фактически опирался на понятие потенциала. Однако ввел это важное понятие не он. Общая постановка теории потенциала появилась в трудах двух ученых: Грина и Гаусса.

Грин изложил свою теорию в сочинении «Исследование по математической теории электричества и магнетизма» (1828). Здесь он исследовал центральную проблему электростатики того времени: задачу о распределении электричества на поверхности проводника, которое индуцируется воздействием внешних электрических сил. В основе рассуждений Грина лежало соображение, что электрические и магнитные силы могут быть определены через функцию координат, такую, что составляющие этих сил по осям суть ее частные соответствующие производные, взятые с обратным знаком. Потенциальная (как ее здесь впервые назвал Грин) функция определяется распределением зарядов. Грин вывел далее интегральную теорему, известную ныне как формула Грина, показал, что значение потенциала внутри или вне любой поверхности выражается через значение потенциальной функции и ее нормальной производной на этой поверхности.

Выражение поверхностной плотности ρ по Грину будет

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \omega} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \omega'} \right],$$

где в скобках помещены нормальные производные потенциала на противоположных сторонах поверхности. Если речь идет о проводнике, поле внутри которого, а следовательно и нормальная производная, отсутствует, то

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \omega}$$

(теперь пишут: $E = 4\pi\rho$, где E — напряженность поля). Наконец, Грин ввел так называемую функцию Грина, интерпретирующуюся как потенциал внутри замкнутой заземленной проводящей поверхности, если туда помещен единичный заряд.

В несколько более общей форме и, по-видимому, независимо от Грина построил общую теорию потенциала Гаусс.

Он сделал это в работе «Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания ... действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (1840). Функцию

$$v = \sum \frac{m}{r},$$

где m могут представлять как обычные массы, так и электрические или магнитные заряды, Гаусс назвал потенциалом. Он систематически исследовал свойства потенциальной функции и ее применение к физическим явлениям. Небезынтересно отметить появление в этой работе теоремы

$$\begin{aligned} \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy). \end{aligned}$$

Эту теорему М. В. Остроградский доказал еще в 1828 г. и истолковал ее как формулу гидродинамического баланса, устанавливающую равносильность учета протекающей жидкости в единицу времени: а) исходя из учета источников внутри объема; б) исходя из скоростей протекания через оболочку.

Теперь, через 11 лет после Остроградского, Гаусс использовал эту формулу для того, чтобы связать величину потока напряженности сил заданного потенциального поля с общей массой или зарядом, помещенным внутри поверхности. В наше время этой формуле присвоено название Гаусса—Остроградского (что, очевидным образом, несправедливо).

В истории физики¹ отмечается, что понятию потенциала физики долго не придавали какого-либо принципиального значения, рассматривая потенциал, или потенциальную функцию, лишь как удобное математическое понятие. Его физический смысл был раскрыт позже, после установления понятий: работы, энергии и закона сохранения энергии.

Иным было положение этого важного понятия в математике. Его введение облегчило расширение области приложений математического анализа. Помимо оптики и колебаний теперь возникала математическая теория электромагнитных явлений. Постановка задачи о потенциале побуждала к рас-

¹ См. Б. И. Спасский. История физики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1956, стр. 352—353.

ширению понятия интеграла, к распространению интегрирования на сложные объекты. В анализе была начата разработка гармонических функций как решений дифференциального уравнения Лапласа: $\Delta v = 0$.

Оказалось, что гармонические функции могут служить для описания многих физических и механических проблем, отличительной особенностью которых является исследование разнородных состояний, зависящих от положения элементов, а не от времени. Так, например, гармоническими функциями оказались помимо потенциалов в полях притяжения и в электрических полях потенциал скоростей установившегося безвихревого движения несжимаемой жидкости, температура тел при установившемся распределении тепла, величина прогиба мембраны, натянутой на произвольный неплоский контур и др. Математический аппарат исследования гармонических функций, возникший при решении одной задачи или одного класса задач, получал постепенно новые приложения.

Гармонические функции получили применение в широком классе краевых задач. Такова задача Дирихле об отыскании значений гармонической функции в области по ее значениям на границе (например, определение температуры внутри тела по температуре на его поверхности, определение формы мембраны по виду контура). К этого рода задачам относится также задача Неймана, в которой гармоническая функция должна быть разыскана по величине нормальной производной на границе области (нахождение температуры внутри тела по заданному на поверхности температурному градиенту, определение потенциала движения обтекающей твердое тело несжимаемой жидкости из условия, что нормальные составляющие скоростей частиц, прилегающих к поверхности тела, совпадают с заданными нормальными составляющими скоростей точек поверхности тела).

Для решения краевых задач теории гармонических функций были разработаны методы, имеющие как практическое, так и большое теоретическое значение. Например, для решения задачи Дирихле Г. А. Шварц и К. Нейман изобрели около 1870 г. альтернирующий метод, Пуанкаре — метод выметаний (около 1880 г.), Фредгольм — метод фундаментальных решений, связанный с интегральными уравнениями, Перрон — метод верхних и нижних функций. Следует еще упомянуть метод сеток как основной метод при приближенном решении краевых задач. Эти методы давали возможность освободиться от того или другого ограничения, которое приходилось налагать на границу области. Но при сколько-нибудь общей по-

становке краевой задачи возникали проблемы условий существования решений и их устойчивости.

Большое значение в истории теории потенциала имеют исследования русского академика А. М. Ляпунова, выполненные в конце XIX — начале XX в.¹ В них изучены: зависимость свойств потенциалов от равномерно распределенных по поверхности зарядов и диполей, потенциал двойного слоя в случае диполей, поведение производных решения задачи Дирихле при приближении к поверхности, на которой задано граничное условие. Решение задачи Дирихле Ляпунов выразил в виде интеграла по поверхности от произведения функции, входящей в граничное условие, на нормальную производную функции Грина.

Как и его предшественники, Ляпунов был вынужден использовать ряд ограничительных требований. Среди этих требований основным является выполнимость принципа Неймана. Ограничение выделяет также класс поверхностей, относительно которых рассмотрены указанные выше вопросы; за этими поверхностями сохранилось название поверхностей Ляпунова.

Проблемы математической физики, выросшие из первых работ по теории потенциала, приобрели, как мы видим, к концу XIX в. большую общность. Решение столь общих теоретических проблем, а затем бурное развитие методов численного решения краевых задач (ставшее возможным в связи с появлением вычислительных электронных устройств), целиком относятся к следующему, XX в. Равным образом к этому более позднему времени относится эффективная разработка важной и трудной обратной задачи теории потенциала: по распределению значений потенциала в силовом поле определить форму и плотность притягивающих масс — задача, актуальность которой (например, для электротехники и геофизики) очевидна.

Математическая теория теплопроводности. Наряду с приложениями математического анализа к электромагнитным явлениям получала развитие другая область приложений этой науки. Речь идет о создании математической теории теплопроводности, позднее развившейся в термодинамику — общую науку о закономерностях теплового движения. Побудительной причиной этого процесса было изобретение паровых машин, сделавшихся вскоре энергетической

¹ См. А. М. Ляпунов. Работы по теории потенциала. ГТТИ, М., 1949.

основой машинного производства. Теоретически исследовать работу паровых машин, найти способы повышения коэффициента их полезного действия — такова была одна из главных задач науки.

Требования, предъявляемые в связи с этим к математике, нашли свое выражение в условиях конкурса, объявленного в 1811 г. Парижской академией наук: дать математическую теорию законов распределения тепла и сравнить результаты этой теории с данными опытов. Победителем конкурса оказался парижский академик (с 1817 г.) Ж.-Б. Фурье (1768—1830). Подобно многим ученым — его современникам, Фурье был выходцем из небогатой семьи портного, окончил военную школу, преподавал в ней. Вскоре после организации Политехнической школы он стал одним из профессоров в ней (1796—1798). Однако в 1798 г. он был включен в число участников экспедиции Наполеона в Египет, а затем занялся организационно-административной деятельностью в качестве префекта департамента Изеры (главный город Гренобль). Лишь в 1817 г. Фурье смог переехать в Париж и целиком посвятить себя научной деятельности.

Основные научные заслуги Фурье связаны с решением задачи распределения тепла. Еще в 1807 г. он представил Академии мемуар, посвященный теории распространения тепла в твердом теле. В 1811 г. последовал второй мемуар на эту тему. Через 11 лет, в 1822 г., Фурье опубликовал «Аналитическую теорию тепла», оказавшую огромное влияние на развитие математики.

Фурье разделял убеждение во всеобщей значимости и всемогуществе анализа бесконечно малых. В его представлении анализ столь же обширен, как сама природа; он отражает ее главные законы, выделяясь ясностью и определенностью, а главное — возможностью доведения до численных приложений. Анализ физического явления по существу заканчивался, как только удавалось выразить его основные черты дифференциальным уравнением. Что же касается принципов построения математической теории, то, по указанию Фурье, они, подобно принципам механики, выводятся из небольшого числа фактов, о причине которых математика не спрашивает, рассматривая их как результаты наблюдений, подтверждаемых данными опыта.

Распространение тепла, как и света, Фурье представлял в виде потока элементарных частиц, свободно проникающих через среду. Элементарное количество тепла dQ , протекающее через пластинку Sdx за время dt с температурным пе-

репадом dv удовлетворяет эмпирически подобранному соотношению:

$$dQ = -kS \frac{dv}{dx} dt$$

(k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала пластинки).

Исходя из этого выражения плотности теплового потока, подсчитывается баланс тепла на участке за элемент времени (в основном, это делается так же, как и в наше время в учебниках по уравнениям математической физики)¹ и приводится к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \Delta v,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Это уравнение Фурье интегрирует при заданных различных краевых условиях. Задается либо распределение

температуры v на границе, либо тепловой поток $\frac{dv}{dn}$, либо их

отношение: $\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dn}$. Для решения уравнения теплопроводности при этих граничных условиях Фурье разработал метод разделения переменных, известный теперь под названием метода Фурье. Ему удалось решить задачи распространения тепла для частных случаев шара, кольца, куба, цилиндра. Характерной чертой метода Фурье является, как известно, разложение функций по найденным собственным функциям. Фурье систематически применял разложение функций в тригонометрические ряды вида

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Хотя ряды такого вида были известны и ранее, но после появления «Аналитической теории тепла» они получили название рядов Фурье, сохранив это имя до сих пор. Фурье

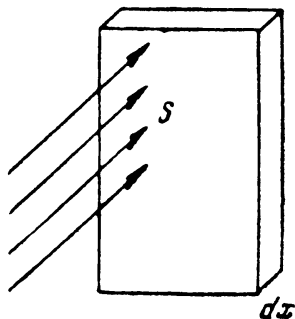


Рис. 11

¹ См. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Уравнение математической физики. ГТТИ, М., 1951, стр. 172 и далее.

применяет тригонометрические ряды не только при n целом, но и в более сложных случаях, когда n определяется трансцендентным соотношением: $\operatorname{tg} n\pi = an$ ($a = \operatorname{const} > 0$). В работах Фурье встречаются даже разложения по бесселевым функциям.

Аппарат тригонометрических рядов дал возможность Фурье выразить с его помощью функции весьма общей природы. Фурье практически мог разложить в ряд любую из функций, которые ему могли в то время предложить. Поэтому он счел себя вправе утверждать, что с помощью указанного аппарата можно дать выражение «абсолютно произвольных» функций, понимая под этим функции, состоящие из произвольных частей известных анализу функций. Строгого доказательства он дать не смог, разумеется, равно как и устранить ряд нестрогостей. Метод Фурье был усовершенствован Пуассоном, Дирихле и особенно Остроградским. Последний в ряде мемуаров 1828—1836 гг. сформулировал этот метод в общем виде, — достаточно общим, чтобы решать задачу для любого твердого тела, ограниченного поверхностью без особенностей. В этих мемуарах им была впервые выведена (1828) упомянутая выше формула Остроградского — Гаусса, дано ее истолкование и обобщение (1834) на n -мерную область

$$\int_{v_n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right) dv_n = \int_s \frac{\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}} ds.$$

Он же решил задачу о распространении тепла в жидкости и высказал в 1831 г., задолго до Римана, принцип локализации: сходимость ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции в точке зависит лишь от значений ее в сколь угодно малой окрестности этой точки. Впрочем, внимательное исследование показывает, что принцип локализации рядов Фурье в не сформулированном явно виде употребляется в ряде работ современников М. В. Остроградского. Этот принцип можно обнаружить в сочинениях самого Фурье, а также у Дирихле (1829) и Лобачевского (1834).

Отнесение в историко-математических работах формулировки и доказательства принципа Фурье к числу заслуг Римана основано на работе последнего «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда».



М. В. Остроградский
1801—1861

Она была представлена Риманом в 1853 г. Геттингенскому университету, но стала известной в 1867 г., после ее опубликования. Работа содержит интересный очерк истории вопроса, и мы поэтому с особым основанием отсылаем к ней читателя¹.

Математические исследования теплопроводности предварили создание более общей науки о теплоте—термодинамике, являясь одним из ее первых этапов. В дальнейшем для ее формирования потребовалось соединение математических методов, ведущих свое начало от Фурье, с соображениями С. Карно об идеальном цикле (1824) и с законом сохранения энергии, открытым в 40-х годах XIX в. Р. Майером, Г. Гельмгольцем и Дж. Джоулем. Это соединение произошло в середине столетия, когда Р. Клаузиус (1850) и У. Томсон-Кельвин (1851) дали формулировку второго начала термодинамики и ввели понятие энтропии. Дальнейшее усовершенствование математического аппарата термодинамики связано с выходом за пределы математического анализа и введением теоретико-вероятностных суждений в кинетическую теорию газов Дж. Максвелла (1860) и статистических представлений в теорию тепловых процессов Л. Больцмана (1871).

В результате исследований ряда ученых швейцарский физик Фик к 1885 г. смог развить количественную теорию диффузии. При этом выяснилось, что его первый закон о количестве диффундирующего вещества аналогичен закономерности, обнаруженной Фурье для теплоты. Именно, масса вещества dm , диффундирующего за время dt через площадку S (см. рис. 11 на стр. 200), перпендикулярную оси ox , выражается формулой

$$dm = -D \cdot S \cdot \frac{dc}{dx} dt,$$

где $\frac{dc}{dx}$ — градиент концентрации, а D — коэффициент диффузии, зависящий от природы частиц и состояния растворителя и диффундирующего вещества. Если коэффициент диффузии постоянен, получается второй закон Фика

$$\frac{dc}{dt} = D \frac{d^2c}{dx^2},$$

т. е. уравнение, эквивалентное уравнению теплопроводности.

В плане математического анализа «Аналитическая теория

¹ См. Б. Риман. Соч. ГТТИ, М., 1948, стр. 225—261.

тепла» послужила, после работ Эйлера и его современников, началом новой разработки теории тригонометрических рядов. Попытка Фурье доказать, что любую функцию можно разложить в тригонометрический ряд, повела к появлению исследований Дирихле, Лобачевского, Римана и др. относительно проблемы представимости функций тригонометрическими рядами. В этих исследованиях сложилась одна из предпосылок создания к концу XIX в. канторовой теории множеств и, более широко, теории функций действительного переменного.

О математическом аппарате механики. Мы привели примеры применений математического анализа в области электрических и магнитных явлений, а также теории теплоты. Этими примерами проблема, разумеется, не исчерпывается. Аналитические методы проникали во многие области естествознания, приобретая в них значение решающих оперативных средств. Едва ли не в первую очередь они проникли в механику, определяя ее содержание. Аналитическая механика приобретала свой классический облик именно как учение о дифференциальных уравнениях, выражающих свойства траекторий любых механических систем. Исследование свойств этих уравнений и их интерпретация для частных случаев приобрели значение главной задачи аналитической механики. Решающую же роль в построении системы этой науки стали играть общие положения, или, как их принято называть, принципы, или законы, механики.

Пусть задана система, положение которой для каждого заданного момента времени t определено значениями n независимых параметров $q_1, q_2, \dots, q_n$, т. е. система с n степенями свободы. Для описания ее движения вводится два понятия: а) живая сила, или кинетическая энергия, T ; б) силовая функция, или потенциальная энергия, U . Понятия кинетической и потенциальной энергии противопоставляются друг другу, поэтому чаще всего рассматривается функция Лагранжа (ранее известная под именем кинетического потенциала, имевшего не столь общий смысл):

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения движения механической системы суть дифференциальные уравнения Лагранжа (введенные им в конце XVIII в.):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В качестве интеграла уравнения получается закон сохранения энергии, сформулированный в середине XIX в.

$$T + U = \text{const.}$$

В случае возмущенных движений вследствие применения внешних сил P справа добавляется соответствующий интеграл:

$$T + U = \text{const} + \int P dt.$$

Решение и исследование дифференциальных уравнений Лагранжа было одним из основных направлений аналитической механики XIX в.

Другой подход к формулированию основных принципов механики состоял в том, что исходили не из дифференциальных уравнений, но из некоторых интегралов, относительно которых решалась вариационная задача отыскания минимума. На этом пути получаются вариационные принципы механики; основным аппаратом при этом является аппарат вариационного исчисления. Первым вариационным принципом был принцип наименьшего действия. Его высказал впервые в 1744 г. Мопертюи. Математически строгая формулировка принципа принадлежала Эйлеру, последующие обобщения — Лагранжу, Якоби и Жуковскому. Позднее появились и другие вариационные принципы, например принцип Гамильтона — Остроградского, или, иначе, принцип стационарного действия¹.

Развитие общих методов интегрирования дифференциальных уравнений динамики, получившее начало в середине XIX в., составляет отдельную область приложений математического анализа. В этой области рассматривается сравнительно неширокий класс дифференциальных уравнений, который, однако, подвергается по возможности глубокому исследованию. Математические результаты здесь особенно тесно сплетены с прикладными интерпретациями их, образуя теоретическую основу всех механических дисциплин.

В этой обширной области приложений мы сможем упомянуть лишь о некоторых достижениях прикладной математики². Так, например, задача приведения дифференциальных уравнений механики к канонической системе уравнений первого

¹ Богатый материал по истории вариационных принципов содержится в сб.: «Вариационные принципы механики». Физматгиз, М., 1959.

² В XIX в. было принято делить математику на чистую и прикладную.

порядка в случае стационарных связей была существенно продвинута уже в начале века (1809) Пуассоном и вскоре (1834) решена Гамильтоном. Остроградский обобщил эти уравнения на случай нестационарных связей. Он же свел интегрирование канонической системы к интегрированию одного нелинейного уравнения с частными производными. То же проделал и Гамильтон для частного случая стационарных связей, используя оптико-механическую аналогию.

По установившейся традиции, математический аппарат механики, связанный с рассмотрением основных принципов этой науки, целиком включается в последнюю. Присоединимся к этому и мы, хотя в этой области водораздел между математикой и механикой провести едва ли возможно. Отметим лишь, что методы математического анализа были и остаются ведущими в решении крупнейших проблем механики: движения тяжелого твердого тела, теории устойчивости равновесия и движения, колебания материальных систем и т. п.

Усовершенствование оперативных средств теории дифференциальных уравнений. Приложения методов математического анализа образовывали важные части смежных научных дисциплин, раскрывая перед ними и перед всем математическим естествознанием новые перспективы развития и изменяя их состав и структуру. Особенно это было заметно в развитии математических методов механики и физики. В свою очередь процесс широкого развертывания прикладных частей оказывал влияние на структуру самого математического анализа.

Что касается классической основы математического анализа, т. е. дифференциального и интегрального исчисления и элементарной теории функций, то, как было показано в предыдущей главе, она подверглась коренной перестройке. В ней были строго сформулированы в терминах арифметики основные понятия: бесконечно малой, непрерывности, предела, дифференциала и др. Понятие функции приобрело современный, весьма общий, характер. Теоремы получили уточненные формулировки с обязательным указанием ограничительных условий: уточнение области значений аргумента, вида функций и т. п., при соблюдении которых они являются справедливыми. Оперативные возможности этой части анализа в результате перестройки значительно расширились, а выводы приобрели большую степень достоверности.

В теории дифференциальных уравнений усиление их

прикладной роли оказалось также связанным с постановкой более широких проблем и выработкой более общих понятий. Так, уже в первой половине XIX в. в теории обыкновенных дифференциальных уравнений практически прекратились попытки отыскания конкретных приемов интегрирования в квадратурах. Выяснилось, что отыскание таких приемов — явление редкое, а возможности — незначительные. Были добавлены лишь немногие факты, в частности относительно уравнения Якоби (1842):

$$(Ax + By + C) dx + (A_1x + B_1y + C_1) dy + (A_2x + B_2y + C_2) \times \\ \times (x dy - y dx) = 0.$$

Среди многочисленных исследований в этой области заметное место занимают те, где изучаются возможности получения решения уравнения, если отправляться от известных в некотором числе его частных интегралов. Например, в 1878 г. Дарбу доказал, что уравнение

$$L dx + M dy + N (x dy - y dx) = 0,$$

где L, M, N — целые многочлены, высшая степень которых m , может быть решено без применения квадратур, если известно не менее $\frac{m(m+1)}{2} + 2$ его частных алгебраических

интегралов. Значительный вклад в разработку этого направления внесли, в частности, математики России: Ф. Г. Миндинг, А. Н. Коркин, В. П. Ермаков и др.

Видное место заняли также проблемы вывода условий интегрируемости и выделения классов уравнений, интегрируемых в квадратурах. Укажем в качестве примера вывод Лиувиллем условия интегрируемости специального уравнения Риккати. Характерным в этом плане являются и выведенные Чебышевым (1853) условия интегрируемости биномиального дифференциала.

Постановка и решение более общих проблем приводят, как правило, к расширению круга понятий. Примером может служить теория линейных дифференциальных уравнений. Частные виды этих уравнений с переменными коэффициентами: уравнение Бесселя (известное, впрочем, еще Даламберу и Эйлеру), гипергеометрическое уравнение

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - abx = 0$$

(служившее, в частности, предметом исследований Эйлера в 1778 г. и Гаусса в 1812 г.), уравнения Лежандра, Ламе и др.—приводили к возникновению теории специальных функций: цилиндрических, шаровых и т. п. Работы Штурма и Лиувилля по решению уравнения

$$y''(x) + p(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$$

при заданных значениях некоторой линейной функции от y и y' в двух точках оси x положили начало исследованиям по теории краевой задачи, названной по имени ее исследователей. Оказалось, что решение этой задачи приводит к необходимости развить теорию интегральных уравнений и теорию разложения функции по фундаментальным функциям.

Дифференциальные уравнения с частными производными в своем развитии всегда сохраняли самый тесный контакт с задачами физики и техники. Как было показано выше, наибольшее прикладное значение имели уравнения второго порядка. Поэтому и в теоретическом плане они привлекали наибольшее внимание. Для них в первую очередь были выделены канонические типы уравнений: гиперболические, параболические и эллиптические. Накапливавшиеся методы решения отдельных типов уравнений подвергались систематизации и посильному обобщению. Эти методы в огромной степени вбирали в себя факты вариационного исчисления, теории функций комплексного переменного, тригонометрических рядов и других высших разделов анализа. Именно в силу их практической значимости эти уравнения оказывались центрами, где сосредоточивались результаты из различных областей математики. Тем самым, в частности, создавались предпосылки для широких аналогий, характерных для современного функционального анализа и общих теорий в области дифференциальных уравнений.

Необходимо также упомянуть, что в то же время выявилось практическое значение уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0.$$

Эти уравнения привлекали внимание Эйлера. Ими же занимался Монж. В начале XIX в. их исследовал И. Ф. Пфафф. В 1814—1815 гг. он сумел показать, что решение этого уравнения (получившего с тех пор его имя) состоит из соотношений

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{и} \quad d\Phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Возникшая отсюда проблема Пфаффа интегрирования этого уравнения при минимально возможном числе соотношений между аргументами $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ вызвала и вызывает обильную литературу. Помимо огромной роли проблемы в создании геометрической теории дифференциальных уравнений и приложений последних к геометрии она получила большое значение для механики. Оказалось, что неголономные связи являются уравнениями Пфаффа между виртуальными перемещениями. Нашли приложение уравнения Пфаффа и в термодинамике.

Название проблем Пфаффа ведет свое начало от Якоби, получившего многочисленные важные результаты о характере интегральных многообразий этого уравнения. Коши (1819) разработал метод характеристик, вслед за чем появился ряд сочинений по теории характеристик для разных видов уравнений различных порядков.

В обстановке быстрого пополнения фактического состава и приложений теории дифференциальных уравнений решающее значение приобрела выработка общих идей, объединяющих и организующих по возможности бóльшее число фактов. Формирование подобных общих идей вообще составляло характерную черту математического анализа XIX в. Особенно важное значение эта черта приобретала в теории дифференциальных уравнений. Здесь уже нельзя было исходить из интуитивной убежденности в существовании общих решений, которые остается только найти по возможности наиболее удачным способом. Надо было доказывать существование решений, исходя из известных элементов. Уже в начале века появились первые доказательства столь характерных для современного анализа теорем существования. Они принадлежали Коши. Эти теоремы были доказаны для дифференциальных уравнений с учетом условий начального состояния, т. е. для задач, известных ныне как задачи Коши.

В лекциях по анализу, которые Коши читал в Политехнической школе, он дал решение этой задачи в простейшей постановке. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка: $y' = f(x, y)$. Доказать существование и единственность его решения при заданных начальных условиях: $x = x_0$; $y = y_0$. Коши доказал это в области, где $f(x, y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ непрерывны. При этом он отправлялся от эйле-

ровского способа приближенного интегрирования: на отрезке оси абсцисс (x_0, X) наметил точки с абсциссами $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = X$. Из этих точек восставил ординаты:

$$y_0;$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0);$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1);$$

$$\dots$$

$$y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \dots + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \times \\ \times (x_n - x_{n-1}).$$

Вершины ординат определяют многоугольник, аппроксимирующий искомую интегральную кривую. Остается доказать существование предельной функции $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, удовлетворяющей условиям задачи Коши.

Это доказательство Коши усовершенствовал в 1844 г. его ученик Ф. Муаньо. Употребляемое ныне условие Липшица было введено последним в 1876 г. Вскоре Дж. Пеано доказал теорему существования хотя бы одного решения упомянутой задачи Коши в области, где $f(x, y)$ непрерывна.

Коши смог распространить свой метод доказательства теорем существования на случай уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$$

при заданных $x = x_0, y = y_0$ и соответственно $y_0^i (i=1, 2, \dots, n)$ путем сведения его к системе уравнений первого порядка. К 1842 г. Коши доказал теорему существования для линейной системы уравнений с частными производными, указав способ приведения к этому виду нелинейной системы. Окончательную, по выражению Пуанкаре, форму теоремам существования придала С. В. Ковалевская (1874), которая доказала теорему существования и единственности решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

где

$$u_i = u_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

при заданных начальных значениях

$$t = t_0, u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

в случае голоморфности функций f_i и φ_i . При этих условиях С. В. Ковалевская доказала, что система имеет для достаточно малых $t - t_0$ голоморфное решение, однозначно определенное начальными условиями.

Наконец, Пикар в 1890 г. развил идею Коши и создал другой метод доказательства теорем существования и единственности, основанный на доказательстве сходимости последовательных приближений

$$y_0; \\ y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx; \\ \dots \dots \dots \\ y_k = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{k-1}) dx.$$

Теоремы существования имели в истории дифференциальных уравнений принципиальное значение. Они решали вопрос о строгости, законности их применения. В то же время методы последовательных приближений, применяемые при доказательстве соответствующих теорем, создавали хорошую основу для разработки методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

К XX в. доказательства теорем существования сделались неотъемлемой частью многих теоретических исследований, вошли в норму математической строгости. В теории дифференциальных уравнений много работ было посвящено различным обобщенным постановкам теоремы Ковалевской: для случаев неаналитических функций, неаналитических решений, постановка проблемы единственности не локальной, а во всей области существования решения и т. п.

Проникновение в теорию дифференциальных уравнений методов других математических дисциплин. Начиная с 70-х годов прошлого века теория дифференциальных уравнений пополнилась двумя направлениями, не потерявшими своей актуальности и в наше время. Мы имеем в виду внедрение в эту область математики теоретико-групповых представлений и создание качественных методов.

В главе VII мы уже упоминали, что Ф. Клейн и С. Ли после обучения в Париже у Жордана задались целью рас-

пространить данные теории групп на возможно большее число областей математики. Клейн рассматривал непрерывные группы геометрических преобразований и, исследуя свойства этих групп, в особенности их инварианты, создал классификацию геометрических наук ¹.

Ли в свою очередь связал (начиная с 1873 г.) теорию групп с исследованием дифференциальных уравнений.

Каждому дифференциальному уравнению Ли считал возможным соотнести непрерывную группу преобразований, относительно которой уравнение является инвариантом. Группы, рассматриваемые при этом, содержат преобразования, определяемые числовыми параметрами

$$x \rightarrow f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Такого рода взаимно однозначное соотнесение преобразований и систем параметров справедливо лишь для малых преобразований. В зависимости от соответствующих бесконечно малых преобразований Ли получил возможность составить классификацию дифференциальных уравнений. При этом он выделил группу преобразований, составляющих класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Теоретико-групповая точка зрения, введенная Ли, доказала узость класса дифференциальных уравнений, решаемых в квадратурах, и бесперспективность попыток построения общей теории дифференциальных уравнений в этом направлении. Поэтому впредь до обнаружения возможностей приложений исследования непрерывных групп в дальнейшем производились в плане построения их общей теории. Из последней выделилась теория групп Ли как таких групп, в которых произведение двух преобразований имеет своими параметрами непрерывные функции параметров преобразований-сомножителей

$$\gamma_i = F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n).$$

Точнее говоря, теория непрерывных групп преобразований появилась именно как теория групп Ли и приобрела близкий к современному уровень общности лишь позже.

Прикладное значение теоретико-групповых концепций для дифференциальных уравнений проявилось в математической физике. Уравнения классической механики, как известно, инвариантны относительно преобразований Галилея. Противоречия, обнаружившиеся в электродинамике движущихся

¹ См. об этом в гл. XI.

тел с результатами классической механики, разъяснились после введения лоренцовых преобразований. Эти преобразования

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

нашел в 1887 г. В. Фохт. Он же доказал инвариантность относительно этих преобразований волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

(Δu — оператор Лапласа).

Лоренц (1904) открыл, что если преобразования Галилея, т. е. повороты, переносы начала и преобразования вида

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t,$$

где использована идея мгновенной передачи взаимодействия тел, заменить преобразованиями Лоренца, то указанные противоречия могут быть устранены. Пуанкаре в свою очередь показал, что преобразования Лоренца образуют группу. Идея рассмотрения классов дифференциальных уравнений с различными группами преобразований получила тем самым практическое воплощение.

Под давлением прикладных задач, в частности задач небесной механики, возникла и развивалась качественная теория дифференциальных уравнений. Как ни велики были успехи в решении различных классов дифференциальных уравнений, ни один из методов не мог помочь в решении старых задач о движении трех тел, подчиненных законам ньютоновской механики. Работы Ли подтвердили невозможность решения соответствующих дифференциальных уравнений в квадратурах. Методы приближенного решения давали лишь частное решение заданной задачи, соответствующее заданным начальным условиям на конечном интервале. Поведение интегральных кривых во всей области существования, как того требовали проблемы небесной механики, ни один из методов не помогал выяснить.

Пуанкаре в серии мемуаров, начатых в 1878 г. и известных под общим названием: «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», исследовал проблему: мож-

по ли и как охарактеризовать поведение семейства интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$ или системы

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_2(x, y)$$

на всей плоскости, исходя из свойств функций f , или φ_1 и φ_2 .

Вообще многие из работ А. Пуанкаре посвящены дифференциальным уравнениям. Помимо проблем небесной механики он исследовал задачу о колебании трехмерных континуумов, изучил ряд задач теплопроводности, теории потенциала, электромагнетизма и т. д. В ходе этих исследований Пуанкаре существенно обогатил совокупность оперативных средств теории дифференциальных уравнений. Он изучал разложения решений дифференциальных уравнений по малому параметру, доказал асимптотичность некоторых рядов, выражающих решения дифференциальных уравнений с частными производными, исследовал особые точки. По-видимому, практические задачи послужили для него толчком и к разработке качественных методов.

В математике качественными называют методы, дающие возможность выявить особенности искомого решения задачи, существование и количество решений и их особенности, не проводя ее численного решения.

Методы Пуанкаре были в основном геометрическими, точнее, топологическими. Рассматривая семейство интегральных кривых, Пуанкаре выделил особые точки и дал их классификацию. Он исследовал специально характер поведения интегральных кривых в окрестности особых точек. Для особого вида интегральной кривой — замкнутой, к которой приближаются по спиралям близкие кривые семейства, Пуанкаре ввел название предельного цикла. В качестве одной из задач, решаемых качественными методами, он изучил интегральные кривые, заданные на торе. Пуанкаре дал первые приложения качественных методов к задаче трех тел. Позднее его исследования о предельных циклах получили применение в радиотехнике (работы А. А. Андропова).

Успех топологических методов Пуанкаре был облегчен наличием предпосылок в виде развитых геометрических идей в теории функций комплексного переменного и в дифференциальной геометрии, а также идей теории множеств Г. Кантора. Своеобразие примененных Пуанкаре методов состояло в том, что они соединили теорию дифференциальных уравнений с топологией. Это вело в свою очередь к формированию топологии как особой отрасли математики, в первую

очередь в упомянутых нами выше работах Пуанкаре. Внутри же теории дифференциальных уравнений за качественными методами укоренилось название топологических.

Почти одновременно с Пуанкаре качественные методы были введены в работах А. М. Ляпунова (1857—1918). Воспитанник Петербургского университета и ученик П. Л. Чебышева, он приступил в 1882 г. по совету своего учителя к решению конкретной, но трудной астрономической задачи: исследовать возможность существования фигур равновесия вращающейся жидкой массы, отличных от эллипсоидальной. Вскоре круг его исследований расширился, охватив проблему устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров, теорию потенциала и др.

Общую проблему устойчивости, о которой мы только что упомянули, Ляпунов свел к исследованию качественными методами поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где F_i — при малых x_i разложимы в сходящиеся ряды по целым степеням x_k и

$$F_i(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Ляпунов отказался от введения линеаризации уравнений путем отбрасывания всех нелинейных членов для выяснения вопроса об устойчивости движения. Устойчивость, по Ляпунову, связывалась с поведением по отношению к возмущениям начальных данных. В докторской диссертации 1892 г. «Общая задача об устойчивости движения» Ляпунов строго определил основные понятия теории устойчивости, выделил случаи, когда линеаризация дает решение вопроса об устойчивости, исследовал ряд случаев, где линеаризация была недостаточной. В связи с этим Ляпунов решил многие вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: о существовании и эффективном построении периодических решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений, поведение интегральных кривых уравнений в окрестности положения равновесия и др.

В ряде работ (1903—1918) Ляпунов дал решение задачи, указанной ему Чебышевым, о форме фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости в условиях ньютоновского тяготения. Он установил существование близких к эллипсо-

видным фигур равновесия однородной и слабонеоднородной жидкости. Оказалось, что невозможно отделить неэллипсоидальные фигуры равновесия от эллипсоидальных. Ляпунов доказал неустойчивость принятых в астрономической теории грушевидных фигур равновесия. Не перечисляя всех результатов, укажем лишь, что работы Ляпунова по устойчивости до сих пор содержат большую часть полученных в этой области фактов. Они продолжают быть основополагающими в развитии теории дифференциальных уравнений и приложений ее к исследованию колебаний физических и механических систем.

В современной математике любая физическая система, поведение которой вблизи каждого состояния описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad t — \text{время}),$$

носит название динамической системы. Общая теория динамических систем изучает совокупность всех их движений, соответствующих всевозможным начальным состояниям. Теория дифференциальных уравнений ко времени работ Ляпунова и Биркгофа (последний начал разрабатывать общую теорию динамических систем в 1912 г.) оказывалась не в состоянии изучать ни решения задачи о движении динамических систем во всей области определения, ни поведение решений вблизи особых точек. Поэтому в общей теории динамических систем большое значение приобретают качественные методы.

Применение качественных методов при этом облегчается геометрическими представлениями динамических систем. Совокупность возможных состояний последних трактуется как n -мерное многообразие, называемое фазовым пространством системы. Точками этого пространства служат отдельные состояния P динамической системы. Совокупность всех движений динамической системы представляется как непрерывная группа преобразований фазового пространства. Отдельное движение характеризуется движением точки P по ее траектории. Роль теории групп для теории динамических систем настолько велика, что в настоящее время динамическую систему часто задают именно как группу преобразований.

Общая теория динамических систем — актуальная область математики, выросшая из практических приложений теории дифференциальных уравнений.

История теории дифференциальных уравнений в XIX в. и ее приложений еще слабо разработана. Известно много фактов этой истории, правда весьма разнородных. Однако общетеоретические закономерности прослеживаются еще с трудом. Настоящая глава представляет одну из немногих попыток выяснения исходных пунктов и главных закономерностей развития этой области математики. В ней: а) показано возрастающее воздействие быстро усложняющихся задач практики на математический анализ в его классической постановке; б) указаны пути преобразования аппарата анализа, в особенности теории дифференциальных уравнений и расширения области его приложений; в) выяснены некоторые черты процесса появления и развития элементов общей теории дифференциальных уравнений (теоремы существования, качественные методы, идеи теории групп); г) отмечено налаживание связей теории дифференциальных уравнений с другими областями математики (топологией, теорией групп, геометрией, теорией функций), появление общих элементов и взаимопроникновение методов.

ГЛАВА X

СОЗДАНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

О предпосылках создания общей теории функций комплексного переменного. Современная теория функций комплексного переменного охватывает чрезвычайно обширную область математики. Этим именем называют большую и разветвленную совокупность математических дисциплин — теоретических и прикладных. Перечислить все эти дисциплины, тем более охарактеризовать их, — дело трудное и громоздкое, даже если ограничиться одними аналитическими функциями. Привлечение к исследованию функций не аналитических, но обладающих некоторыми свойствами аналитических функций (мы имеем в виду теории функций квазианалитических и моногенных, отображений внутренних и квазиконформных и т. п.) весьма расширяет область рассматриваемой нами здесь теории и усиливает трудности анализа путей ее формирования.

Для рассмотрения в настоящей главе мы выберем вопросы, связанные с вхождением в математику мнимых и комплексных объектов, обращая меньше внимания на свойство аналитичности функции, т. е. представимости ее степенным рядом

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Мы считаем себя вправе поступить так потому, что об истории класса аналитических функций и связанного с этим классом аппарата степенных рядов выше мы уже приводили некоторый материал.

Рассмотрим вначале вопрос о предпосылках создания теории функций комплексного переменного, накопившихся к XIX в.

Понятие мнимого, а затем комплексного числа известно в математике и используется с давних времен. История его появления отражает ту общую черту развития математических исчислений, что введение и использование обратных операций ведет, как правило, к необходимости расширения числовой области. Так, введение вычитания вынудило в конце концов дополнить натуральный ряд отрицательными числами, деление привело к расширению целочисленного ряда до множества рациональных чисел. В свою очередь операция извлечения корня явилась оперативной причиной введения общего понятия действительного числа. Частный случай, когда речь шла об извлечении корня четной степени из отрицательного числа, требовал введения мнимых чисел.

Только в XVI в. в связи с алгебраическим решением кубических уравнений Р. Бомбелли (1572) отошел от трактовки мнимых чисел как таинственных или нелепых и выработал правила арифметических операций с мнимыми числами. Однако еще в течение очень долгого времени, несмотря на некоторые удачные мысли (например, Валлиса) относительно интерпретации мнимых и комплексных чисел, их природа не была разгадана и к ним относились как к некоторому сверхъестественному явлению в математике. Еще в 1702 г. Г. В. Лейбницу приходилось писать, что мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием. Не было в истории недостатка в подобных утверждениях о мистических свойствах мнимых и со стороны других ученых.

Неразъясненность понятия комплексного числа не могла заслонить их полезности в решении конкретных задач. Большое количество накопленных фактов дало повод математикам XVIII в. перенести понятие мнимости и в область переменных величин. Поскольку этот перенос осуществлялся для конкретных случаев, то в зависимости от характера задачи мнимые величины представляли перед исследователями в разном «обличье»: физическом, геометрическом или же в аналитическом. Задача научной интерпретации комплексных чисел решалась сразу в разных планах, вместе с общим развитием математического анализа.

По-видимому, наиболее ранними в этом столетии были попытки Лейбница и И. Бернулли ввести операции с комплексными числами с целью достичь возможно более общих

результатов в интегрировании. Используя в этих целях разложение подынтегральных функций на элементарные дроби, они широко пользовались аналогиями. Например, в 1704 г. И. Бернулли утверждал в одной из своих работ, что, поскольку применение к дифференциалу

$$\frac{adz}{b^2 - z^2}$$

подстановки

$$z = b \frac{t-1}{t+1}$$

преобразует его в так называемый логарифмический дифференциал

$$\frac{adt}{2bt},$$

то применение к

$$\frac{adz}{b^2 + z^2}$$

мнимой подстановки

$$z = \sqrt{-1} b \frac{t-1}{t+1}$$

даст «дифференциал мнимого логарифма»

$$\frac{adt}{2\sqrt{-1}bt}.$$

Еще одна мнимая подстановка

$$t = \frac{b\sqrt{-1} + \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}{b\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}},$$

и помимо установленной только что связи между $\operatorname{arctg} \frac{z}{b}$ и

$$\operatorname{Ln} t = \operatorname{Ln} \frac{b - z\sqrt{-1}}{b + z\sqrt{-1}}$$

И. Бернулли находит еще одно соотношение:

$$d(\operatorname{arcsin} b\sqrt{r}) = d\left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{Ln} t\right).$$

Подобные методы способствуют накоплению фактов о мнимых количествах, но не проясняют их природы. Поэтому понятно, что каждая из попыток ввести комплексные числа формально оперативным путем приводила к спорам, порою весьма ожесточенным.

В качестве примера таких споров упомянем спор о природе логарифмов отрицательных и мнимых величин. Этот спор начался в 1712 г. между Лейбницем, считавшим логарифмы отрицательных чисел мнимыми, и И. Бернулли, настаивавшем на том, что они действительны. При этом И. Бернулли опирался на «доказанный» им факт, что

$$\ln y = \ln(-y).$$

В спор включились ряд ученых, в том числе Даламбер и Эйлер. Однако спор не утих даже после того, как в 1749 г. Эйлер открыл многозначность логарифма и предложил убедительное для того времени доказательство.

Эйлер исходил из уравнения

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i,$$

т. е. в современной форме записи

$$x = e^y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Здесь, как мы уже упоминали, i — «бесконечно большое» число¹. Разрешая это уравнение относительно y , Эйлер получил

$$y = \ln x = i(x^{\frac{1}{i}} - 1),$$

т. е.

$$y = \ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Здесь $x^{\frac{1}{i}}$ — корень с бесконечно большим показателем. Он бесконечнозначен. Все его значения различны; вообще говоря, они мнимые. Следовательно, логарифм тоже имеет бесконечное множество различных значений, которые отличаются на числа, кратные $2\pi\sqrt{-1}$. В самом деле,

¹ См. стр. 24.

$$x = a + b \sqrt{-1} = \rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) = \\ = e^c (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi).$$

Отсюда

$$y = \ln x = c + (\varphi \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}) \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Одно из значений логарифма действительного положительного числа будет действительно, остальные — мнимые. Значения логарифмов отрицательных и мнимых чисел — все мнимые.

Решающий толчок введению мнимых чисел в математический анализ был дан тогда, когда выяснилась их полезность в решении дифференциальных уравнений математической физики. Это проявилось в сочинениях Даламбера (1752) и Эйлера (1755) по гидродинамике. В этих работах были использованы результаты Эйлера (1734) и Клеро (1739), эквивалентные утверждению, что выражение

$$P dx + Q dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y)$, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Даламбер решал задачу обтекания твердого тела жидкостью (однородной и без учета веса). Обозначив p и q — составляющие по осям скоростей частиц, протекающих через точку $M(x, y)$, он нашел из сравнения их полных дифференциалов уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

которые интерпретируются как условия того, что

$$p dx + q dy \quad \text{и} \quad p dy - q dx$$

суть полные дифференциалы. Эти уравнения были получены также Эйлером.

Теперь уже нетрудно определить пару сопряженных гармонических функций, являющихся решениями системы уравнений Даламбера — Эйлера. Следовало лишь применить метод, предложенный Даламбером в случае уравнения колебания струны. Пусть

$$p dx + q dy = du, \quad p dy - q dx = dv.$$

Тогда

$$d(u + \sqrt{-1}v) = (p + \sqrt{-1}q) d(x + \sqrt{-1}y),$$

$$d(u - \sqrt{-1}v) = (p - \sqrt{-1}q) d(x - \sqrt{-1}y).$$

Отсюда

$$p + \sqrt{-1}q = \frac{d(u + \sqrt{-1}v)}{d(x + \sqrt{-1}y)} = \varphi(x + \sqrt{-1}y),$$

$$p - \sqrt{-1}q = \frac{d(u - \sqrt{-1}v)}{d(x - \sqrt{-1}y)} = \psi(x - \sqrt{-1}y).$$

Сопряженные гармонические функции, как нетрудно теперь увидеть, представляют действительную и мнимую часть функции комплексного переменного.

Эйлер, получив аналогичный результат и не имея возможности дать ему подходящую интерпретацию, выразил сопряженные гармонические функции в виде рядов по однородным гармоническим полиномам, представляя при этом комплексные числа как в алгебраической, так и в тригонометрической форме.

К середине XVIII в. в математическую практику вошли различные аспекты понимания комплексного числа, как переменного, так и постоянного. Наибольшие заслуги в этом деле принадлежат Эйлеру. Он же в серии монографий, посвященных общему построению анализа («Введение в анализ бесконечно малых», тт. 1—2. «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», тт. 1—3), считал возможным включить в общую систему и аналитические функции комплексного переменного. Во «Введении в анализ бесконечно малых» (1748) Эйлер ввел комплексную переменную в качестве наиболее общего понятия переменной величины, используя комплексные числа при разложении функций на линейные сомножители. Он ввел впервые формулы (приведем их в привычной нам символике):

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n; \quad \ln z = \lim_{n \rightarrow \infty} n(z^{\frac{1}{n}} - 1);$$

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos n z \pm i \sin n z,$$

а также формулы связи между тригонометрическими и показательными функциями

$$\cos v = \frac{e^{+iv} + e^{-iv}}{2}; \quad \sin v = \frac{e^{+iv} - e^{-iv}}{2i};$$

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v.$$

Если рассмотреть всю совокупность фактов, установленных Эйлером и его современниками, то можно прийти к выводу, что основные факты теории элементарных функций комплексного переменного были в большей части уже выявлены.

Что касается дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного, то Эйлер, полагая

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

действовал с ними, как с парами функций вещественного переменного. Кроме того, в серии работ (1776—1783) он использовал комплексные числа при вычислении интегралов. Не формулируя явно, он выделил класс аналитических функций комплексного переменного, высказав относительно них принцип симметрии, состоящий в том, что всякая функция $Z(z)$, где $z = x + iy$, имеет вид

$$Z(x + iy) = M + iN,$$

а при $z = x - iy$

$$Z(x - iy) = M - iN.$$

Если теперь рассмотреть интеграл

$$\int Z dz = V,$$

где

$$z = x \pm iy, \quad V = P + iQ,$$

то

$$P + iQ = \int (M + iN) (dx + i dy),$$

$$P - iQ = \int (M - iN) (dx - i dy),$$

откуда

$$P = \int M dx - N dy, \quad Q = \int N dx + M dy.$$

Как указывалось выше, условие, что подынтегральные выражения есть полные дифференциалы, ведет к известным условиям Даламбера — Эйлера

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

В других случаях Эйлер использует

$$z = v (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Полагая здесь $\varphi = \text{const}$, он таким образом интегрирует вдоль луча, выходящего из начала координат.

Работа Эйлера «О представлении сферической поверхности на плоскости» (1777) не только содержит идею, но и практически вводит конформное отображение областей сферы на плоскость. Эйлер называл эти отображения «подобными в малом». Термин «конформный» был впервые употреблен, по-видимому, петербургским академиком Ф. Шубертом в 1789 г. Рассматривая долготу t и широту u сферической поверхности и соответствующие декартовы координаты x и y точек плоскости, Эйлер вывел общие условия конформного отображения в виде

$$dx = p du + r dt \cos u,$$

$$dy = r du - p dt \cos u,$$

откуда

$$dx + i dy = (p + ir) (du - i dt \cos u).$$

С помощью подстановки

$$s = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right), \quad z = \ln s - it$$

это преобразуется в

$$dx + i dy = (p + ir) \cos u dz.$$

Геометрически это соответствует: стереографической проекции сферы на плоскость

$$\zeta = s (\cos t + i \sin t),$$

преобразованию плоскости ζ посредством логарифма

$$\varepsilon = \ln \zeta = \ln s + it,$$

зеркальному отражению в действительной оси $z = \overline{\varepsilon}$. Такое конформное отображение сферы (без полюсов) на плоскость

$$z = \ln s - it = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) - it$$

называется проекцией Меркатора в картографии¹.

¹ См. А. И. Маркушевич. Очерки по истории теории аналитических функций. Гостехиздат, М., 1951, стр. 33.

Поэтому

$$x + iy = 2\Gamma(z) = 2\Gamma(\ln s - it),$$

$$x - iy = 2\Gamma(\ln s + it),$$

$\Gamma(z)$ — аналитическая функция с действительными значениями при z — действительном, откуда

$$x = \Gamma(\ln s - it) + \Gamma(\ln s + it),$$

$$iy = \Gamma(\ln s - it) - \Gamma(\ln s + it).$$

Таким образом, еще Эйлер сумел практически решить общую задачу о конформном отображении областей сферы на плоскость.

Математическая литература XVIII в. в интересующем нас здесь плане представляет пестрое переплетение важных результатов, проливающих свет на природу комплексных величин, не менее важных приложений последних к гидродинамике, картографии и другим наукам, и обильных ошибок и неясностей в пользовании мнимыми объектами. Различные интерпретации комплексных чисел еще не сформировались в единую концепцию, тем более это относится к комплексным переменным. Однако все необходимые элементы общей теории, могущей охватить свойства функций комплексного переменного, в основном сложились; наступила пора создания этой теории. Эта пора совпала с наступлением XIX в.

Введение основных понятий теории функций комплексного переменного. Очередной этап истории теории функций комплексного переменного был характерен введением уточненных определений основных понятий. Прежде всего, речь идет о появлении геометрических интерпретаций понятия комплексного числа. Эти интерпретации были первыми выделены в явном виде из массы накопленных фактов в качестве предмета специального систематического изучения. Начиная с 1799 г. появилась серия работ, в которых были даны более или менее удобные интерпретации комплексного числа и определены правила действий. Общим во всех работах было введение плоскости, на которой комплексные числа изображены либо в виде точки, либо направленного отрезка.

Геометрическим представлением мнимых чисел и операций над ними владели К. Вессель (в 1799 г.), Бюе (Buée) и Арган (в 1806 г.), Гаусс, а вскоре и многие другие ученые. Однако они сочетали этот вопрос с конкретными задачами в

других областях математики. Достаточно же общая теоретическая трактовка вопроса появилась вначале у Гаусса, а затем в сильной степени в работах Коши.

Землемер по специальности, К. Вессель в работе «Об аналитическом представлении направления» (1799) поставил задачу отыскать аналитическое выражение длины и направления отрезка на плоскости. Для этого он использовал комплексные числа

$$z = x + \sqrt{-1} y = r (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

попутно выяснив их сущность и отношение к действительным числам, для изображения которых достаточно одной прямой. На осях координат он ввел единичные отрезки:

$$+1, \quad -1, \quad +\varepsilon (= \sqrt{-1}), \quad -\varepsilon,$$

обобщив затем этот прием добавлением третьей пространственной единичной координаты $\pm\eta$. Числа изображены были векторами из начала координат, над ними определены операции и решен ряд задач, вплоть до аналитического выражения вращения.

Написанная на датском языке, работа Весселя оставалась долгое время незамеченной. Более широкую известность, впрочем тоже не сразу, получили вышедшие в 1806 г. работы Аргана и Бюе. В них была реализована та же идея изображения мнимого числа путем откладывания отрезка, перпендикулярного действительной оси. Идеей изображения комплексного числа как элемента двухразмерного пространства полностью владел Гаусс, первоначально, в течение длительного времени, не посвящая ее изложению специальной работы, так как, по его мнению, необходимо было считаться с убеждениями современников. Лишь в 1831 г. он опубликовал работу по теории биквадратичных вычетов, где изложил теоретическое обоснование и геометрическую интерпретацию комплексных чисел, дав им впервые это сохранившееся до наших дней имя. Чтобы лучше понять, сколь глубоко Гаусс проник в теорию комплексных чисел, достаточно привести отрывок из письма Гаусса астроному и математику Бесселю (1811 г.; опубликовано лишь в 1880 г.). В этом письме по поводу вводимого им интегрального логарифма $\text{li}(x) = \int_{\ln z} \frac{dx}{x}$ Гаусс писал: «Что нужно понимать под $\int \varphi x \cdot dx$ для $x=a+bi$?

Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x , отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $a + bi$) переходит к $x = a + bi$, и тогда сложить все $f(x) \cdot dx$.

Итак, смысл (интеграла) вполне установлен. Но переход можно осуществить бесконечно многими способами: так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно осмыслить посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой с абсциссой a и ординатой b будет представлять величину $a + bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a + bi$ представляется тогда посредством линии и возможен бесконечным множеством способов. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int f(x) \cdot dx$ при двух различных переходах всегда сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключенной между двумя линиями, представляющими переход, $f(x)$ нигде не обращается в бесконечность. Это прекраснейшая теорема, нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае. Она связана с другими прекрасными истинами, относящимися к разложению в ряды».

В этом отрывке содержится многое: отчетливая интерпретация мнимых чисел, определение интеграла в комплексной плоскости, интегральная теорема (известная теперь как теорема Коши), разложимость аналитической функции в степенной ряд. В этом же письме Гаусс рассмотрел $\int \frac{dx}{x}$ и его значение в точке $x = 0$. При обходах вокруг этой точки к первообразной $y = \log x$ будут добавляться постоянные слагаемые $\pm 2\pi i$.

Выяснение смысла интегрирования на комплексной плоскости имело особенно большое значение потому, что использование комплексных переменных при вычислении трудных определенных интегралов оказывало, по-видимому, наибольшее в то время влияние на развитие теории функций комплексного переменного. Лаплас (1749—1827) в серии работ 1782—1812 гг. неоднократно прибегал к помощи мнимых при интегрировании функций. Он развивал метод решения линейных уравнений, разностных и дифференциальных, известный под названием преобразования Лапласа: неизвестная функция $y(s)$ заменяется интегралом вида $\int \varphi(x) x^s dx$, или $\int \varphi(x) e^{-sx} dx$, где $f(x)$ — новая неизвестная функция. Это

преобразование переводит, как мы теперь говорим, функцию-оригинал $f(t)$, $0 < t < \infty$ в функцию

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

комплексного переменного $p = \sigma + it$. Необходимые преобразования (замена переменной при интегрировании, интегрирование по направлениям, отличным от действительной оси) Лаплас еще рассматривает как «орудия открытия», удобный метод, подобный своеобразной индукции. Его действительное значение, конечно, больше: с помощью преобразования Лапласа и аналогичных методов эффективно решаются многие задачи электротехники, гидродинамики, механики, теплопроводности, так как при этом в соответствующих линейных дифференциальных уравнениях с частными производными число переменных сокращается. Особенно широко оно применяется в операционном исчислении.

Результаты Лапласа и других ученых, занимавшихся аналогичными проблемами, получаются, таким образом, на пути изучения свойств степенных рядов с помощью перехода от вещественных членов ряда к комплексным. Интегрирования в комплексной области, пожалуй, еще нет; интегрируются мнимые функции по вещественному аргументу. Новая идея в этом направлении была высказана Пуассоном (около 1820 г.): выбирать пути изменения переменной между вещественными пределами по последовательности комплексных значений. Целью этого являлось преодоление затруднений, связанных с несобственностью интегралов из-за обращения подынтегральной функции в бесконечность. По выражению Пуассона,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

«не является суммой дифференциалов», так как

$$\frac{1}{x} \Big|_{x=0} = \infty.$$

Но если ввести подстановку

$$x = -e^{iz} = -(\cos z + i \sin z)$$

и интегрировать по z от 0 до $(2n + 1)\pi$, то интеграл окажется равным $-(2n + 1)\pi i$. Таким же способом

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^m} = \frac{(-1)^m}{m-1} [\cos(m-1)(2n+1)\pi - 1].$$

Под давлением практических задач затруднения, связанные с применением комплексных переменных, были в основном преодолены рядом ученых. Назрела необходимость в систематической разработке теории функций комплексного переменного и ее связей с остальными частями анализа бесконечно малых. Выполнение этой задачи выпало в значительной части на долю Коши.

В «Алгебраическом анализе» и «Резюме лекций по дифференциальному и интегральному исчислению» Коши, как известно, стремился построить цельную и строгую систему анализа бесконечно малых. В этой его системе нашли отражение усилия по систематизации фактов, относящихся к использованию в анализе комплексных чисел и переменных количеств. Принципиально нового по сравнению с предшественниками и современниками лекции Коши в этой области не содержат. Комплексное переменное здесь в основном еще только вспомогательное средство для решения трудных задач интегрального исчисления; при введении операций велик элемент аналогии.

Однако сама попытка построения системы анализа, естественно, вынудила Коши к разъяснению смысла основных понятий и операций с мнимыми. Первые существенные результаты Коши опубликовал в 1825 г. в двух работах: «Мемуар о теории определенных интегралов» и «Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами». Первый из них был написан еще в 1814 г. В нем и цель еще осталась прежняя: применить мнимые величины к вычислению определенных интегралов. Исходный пункт Коши — соотношение

$$\int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(x, y) dy dx = \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(x, y) dx dy,$$

известное еще от Эйлера (1769). Затем Коши выбирает две функции S и V , удовлетворяющие уравнениям Даламбера — Эйлера:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Этому требованию удовлетворяет, как известно, действительная и мнимая часть аналитического выражения

$$F(x + iy) = S + iV.$$

Подставляя в правую и левую части исходного соотношения вместо $f(x, y)$ соответственно правые и левые части уравнений Даламбера—Эйлера, получим:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^X \int_{y_0}^Y \frac{\partial V}{\partial y} dy dx &= \int_{y_0}^Y \int_{x_0}^X \frac{\partial S}{\partial x} dx dy; \\ \int_{x_0}^X \int_{y_0}^Y \frac{\partial S}{\partial y} dy dx &= - \int_{y_0}^Y \int_{x_0}^X \frac{\partial V}{\partial x} dx dy, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^X [V(x, Y) - V(x, y_0)] dx &= \int_{y_0}^Y [S(X, y) - S(x_0, y)] dy; \\ \int_{x_0}^X [S(x, Y) - S(x, y_0)] dx &= \int_{y_0}^Y [V(X, y) - V(x_0, y)] dy \end{aligned}$$

Лишь незадолго перед опубликованием Коши догадался свести эти две формулы в одну, чтобы получить соотношение относительно функции комплексного переменного. Первое из соотношений он умножил на i и сложил со вторым соотношением. Получилось:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^X F(x + iY) dx - \int_{x_0}^X F(x + iy_0) dx &= \\ = \int_{y_0}^Y F(X + iy) idy - \int_{y_0}^Y F(x_0 + iy) idy, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^Y F(x_0 + iy) idy + \int_{x_0}^X F(x + iY) dx &= \\ = \int_{x_0}^X F(x_0 + iy_0) dx + \int_{y_0}^Y F(X + iy) idy, \end{aligned}$$

что является интегральной теоремой Коши для интегрирования по прямоугольному контуру:

$$\int_{ADC} F(z) dz = \int_{ABC} F(z) dz.$$

При этом Коши, независимо от Гаусса, указал на необходимость требования, чтобы $f(x, y) \neq \infty$ на сторонах прямоугольника и внутри его.

Во втором из упомянутых выше мемуаров Коши выясняет смысл интеграла

$$\int_{x_0+iy_0}^{x+iy} f(z) dz.$$

Чтобы соблюсти аналогию с интегралами от функций действительного переменного и иметь возможность трактовать заданный интеграл как предел интегральной суммы, Коши указал, что следует установить для $z=x+iy$ соотношения:

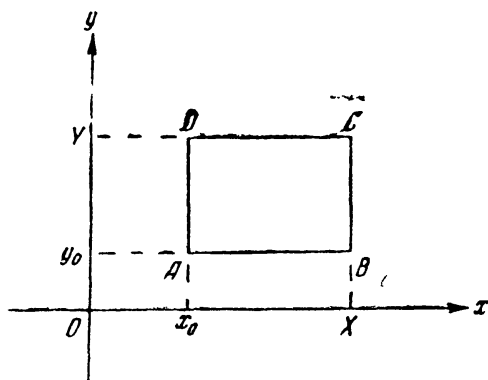


Рис. 12

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Эти функции должны быть монотонны и непрерывны в области $t_0 \leq t \leq T$ и удовлетворять условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad x(T) = X, \quad y(T) = Y.$$

Иначе говоря, исследуемый интеграл Коши заменил интегралом вдоль некоторой кривой, соединяющей на комплексной плоскости точки (x_0, y_0) и (X, Y) . Посредством уравнений кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ он сводится к интегралу

$$\int_{t_0}^T (x' + iy') f(x + iy) dt.$$

После этого следует формулировка интегральной теоремы: если $f(x+iy)$ конечна и непрерывна в прямоугольнике $x_0 \leq x \leq X$ и $y_0 \leq y \leq Y$, то значение интеграла не зависит от пути интегрирования. Для ее доказательства Коши прив-

лек методы вариационного исчисления. Именно он заменил $x(t)$ и $y(t)$ на близкие значения $x(t) + \varepsilon u(t)$, $y(t) + \varepsilon v(t)$, вычислил вариацию интеграла и установил, что она равна нулю. Современный вид доказательство интегральной теоремы получило в 1883 г. у Фалька и в 1884 г. у Гурса.

Совершенно естественный переход к анализу случаев, когда $f(z)$ обращается в бесконечность внутри или на границе прямоугольника, привел Коши к необходимости ввести понятие вычета. Еще в мемуаре 1814 г. он пришел к нему, отыскивая разность между двумя интегралами с общими пределами, но взятыми по разным путям, между которыми оказываются полюсы функции. В 1826 г. появляется и самый термин: вычет, который Коши вводит следующим образом: «Если, после того как найдены значения x , обращающие $f(x)$ в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1 , бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1 + \varepsilon)$ по возрастающим степеням того же количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением $\frac{1}{\varepsilon}$ на конеч-

ный коэффициент, который мы назовём вычетом функции $f(x)$, относящимся к частному значению x_1 переменной x ». Сумма таких вычетов называлась у Коши интегральным вычетом.

В большом числе (16) работ Коши создал теорию вычетов. В основном эта теория оформилась в 1826—1829 гг., но Коши продолжал ее развивать и в последующие годы, отыскивая новые и новые приложения этой теории к решению различных задач интегрального исчисления (преимущественно к вычислению определенных интегралов), алгебраических, трансцендентных и дифференциальных (речь идет о системах линейных уравнений с постоянными коэффициентами) уравнений, теории разложения функций в ряды и математической физики. Интересно, что при этом Коши настойчиво подчеркивал наличие идеи о вычетах у Эйлера и не отстаивал свой приоритет.

В работах Коши впервые появилась интегральная формула — весьма важная для последующего развития теории функций комплексного переменного и ее приложений. Она была введена в серии работ Коши, посвященных разложению аналитических функций в ряды. В наиболее явной форме она впервые появилась в мемуаре «О небесной механике и о новом исчислении, называемом исчислением пределов» (1831).

Вначале интегральная формула Коши была получена как условие разложения функции в ряд. Отметив, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{npi} dp = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-npi} dp,$$

а при $n=0$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dp = 2\pi,$$

Коши рассматривает сначала полином

$$f(\bar{x}) = a_0 + a_1\bar{x} + a_2x^2 + \dots + a_n\bar{x}^n,$$

где $\bar{x} = xe^{pi}$, и получает

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\bar{x}) dp = \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{1}{x}\right) dp = 2\pi a_0 = 2\pi f(0).$$

Эта формула оказывается верной и для любой (по словам Коши) функции $f(\bar{x})$, конечной и непрерывной, при удовлетворении условия

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{ix} \frac{df(\bar{x})}{dp}.$$

Если $f(0) = 0$, то очевидно

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\bar{x}) dp = 0.$$

Подставив в эту формулу вместо $f(\bar{x})$ выражение

$$\frac{\bar{x}[f(\bar{x}) - f(x)]}{\bar{x} - x},$$

где $|x| < |\bar{x}|$, Коши получил

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\bar{x}f(\bar{x}) dp}{\bar{x} - x} &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\bar{x}f(x)}{\bar{x} - x} dp = f(x) \int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \dots\right) \times \\ &\times dp = 2\pi f(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\bar{x}f(\bar{x})}{\bar{x} - x} dp.$$

Если использовать имеющееся у Коши соотношение

$$dp = \frac{d\bar{x}}{i\bar{x}},$$

то получим интегральную формулу в современной форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\bar{x})}{\bar{x} - x} d\bar{x}.$$

Но упомянутое выражение для dp имеет место лишь, если модуль $\bar{x}$ постоянен. Таким образом, контур интеграции здесь — окружность. Результат получился у Коши еще недостаточно общий. В настоящее время известно, что теорема справедлива для любой взятой в качестве контура замкнутой спрямляемой жордановой кривой.

В других мемуарах Коши рассматривал применения этой теоремы: к теории сходимости рядов, для вывода остаточного члена ряда Тейлора и оперирования с рядами. Вслед за Коши многие математики XIX и XX вв. посвящали свои работы его интегральной теореме. Последняя

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

как известно, дает выражение $f(z)$ для z любого, находящегося в области аналитичности функции, через ее значение на контуре C . Широкая применимость интеграла Коши в теории специальных функций, аналитической теории дифференциальных уравнений, аналитической теории чисел, теоретической физике, различных областях механики определила в последующем его актуальность, сохранившуюся до наших дней.

Наряду с мемуарами Коши и вслед за ними появилось много работ по теории функций комплексного переменного. Их трудно перечислить, тем более охарактеризовать. Здесь мы упомянем прежде всего замечательную работу Абеля «Исследования ряда

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots,$$

где m и x — любые комплексные числа», содержащую вывод двух замечательных теорем. Первая теорема: если ряд $f(a) = v_0 + v_1 a + v_2 a^2 + \dots$ сходится для некоторого $a = a_0$, то он сходится для a , меньшего a_0 по модулю (понятие модуля у Абеля еще отсутствует, что утяжеляет язык изложения). Вто-

рая теорема: $f(\alpha - \beta) \rightarrow f(\alpha)$, если $\beta \rightarrow 0$, $\alpha \leq \alpha_0$, т. е. сумма сходящегося степенного ряда есть непрерывная функция аргумента. Здесь же Абель отметил ошибку Коши, утверждавшего, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна. Общий же вклад Абеля в теорию функций, в которой он заложил основы теории алгебраических функций и (одновременно с Якоби) теории эллиптических функций, настолько значителен, что заслуживает специального сочинения.

40-е годы XIX в. отмечены в истории теории функций комплексного переменного крупнейшими открытиями, по существу завершившими период ее формирования. В 1843 г. Лоран нашел и опубликовал ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

носящий ныне его имя. В эти же годы Лиувилль применил теорию Коши к теории эллиптических функций. Среди доказанных им теорем имеется, например, такая: если аналитическая функция $f(x)$ на всей комплексной плоскости ограничена по модулю, то $f(x) \equiv \text{const}$. Пюизё разработал теорию алгебраических функций и осуществил разложение многозначных алгебраических функций по дробным степеням. Характер новых открытий и их уровень делались уже весьма близкими к современным.

Одним из признаков того, что теория уже сформировалась, является появление монографий, содержащих ее систематическое изложение в стиле, близком к аксиоматическому, и имеющих также учебные цели. В теории функций комплексного переменного этот момент наступил в середине XIX в. Профессор Петербургского университета Н. И. Сомов в 1850 г. опубликовал «Основания теории эллиптических функций». Через шесть лет, в 1856 г., Брио и Буке издали небольшой мемуар «Исследование функций мнимого переменного», являющийся по существу первым учебным пособием. С 1861 г. в Берлинском университете начались курсы лекций Вейерштрасса по теории аналитических функций.

Создание геометрической теории функций комплексного переменного. В 40-х годах прошлого века, одновременно с завершением формирования основ теории аналитических функций, в эту теорию были внесены новые идеи, существенно изменяющие ее состав, характер и цели. Большая группа идей вошла с работами Б. Римана (1826—1866).

Исследования Римана в области теории функций ком-

плексного переменного характерны наличием широких аналогий, связавших эту теорию со многими другими областями математики. Тем самым была в значительной мере преодолена изолированность представлений о функциях комплексных переменных. Одновременно в рамках самой этой теории сформировались новые отделы, тесно связанные с другими дисциплинами. Основные результаты Римана содержатся в его диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» (1851) и в «Теории абелевых функций» (1857). Известно, что аналитическая функция $w = u + iv$ от комплексного аргумента $z = x + iy$ удовлетворяет (помимо ставших само собой разумеющимися требований дифференцируемости по совокупности действительных переменных и непрерывности) уравнениям Даламбера—Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда, очевидно, следуют условия

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Во времена Римана появилось много интерпретаций этого замечательного факта. Гельмгольц трактовал u как потенциал скорости движения несжимаемой жидкости в плоскости (x, y) ; при этом v была функцией тока. В электротехнике, когда речь шла о стационарном течении тока, Кирхгоф вводил функцию u и называл ее электростатическим потенциалом. Ом определял ее как напряжение, а Фурье интерпретировал u как температуру в решении задачи о стационарном движении тепла. Наконец, у Гаусса отмеченный факт трактовался как условие, что значение

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d(u + iv)}{d(x + iy)}$$

зависит лишь от точки $x + iy$, а не от направления $dx + idy$, т. е. отображение плоскости (x, y) на плоскость (u, v) есть конформное отображение.

Риман также исходил из того, что действительная и мнимая часть функции удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0,$$

т. е. являются гармоническими. Если известна функция u , то сопряженная функция v определяется с точностью до аддитивного постоянного:



Г. Б. Римап
1826—1866

$$v = \int \left(- \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Риман решил, что создаются условия для переноса идей математической физики в теорию функций. К тому же методы решения уравнения Лапласа были к тому времени достаточно хорошо разработаны. Соответствующая краевая задача, называемая проблемой Дирихле, формулируется так: найти значения функции в точках области по ее значениям на границе области. Решения задачи Дирихле для ряда специальных случаев были разработаны Гауссом (1813 и 1840 гг.). Грином (1828), Кирхгофом, Дирихле и др. В этих исследованиях позднее выкристаллизовалась теорема существования: если на границе односвязной области G задана непрерывная функция $u(x, y)$, то существует аналитическая внутри области G функция $f = u + iv$, действительная часть которой непрерывно приближается к заданным граничным значениям.

Риман в этом круге задач исследовал проблему: в какой мере аналитические функции определяются по краевым условиям. Быстро выяснилось в то время, что в случае конечной области, ограниченной единственной замкнутой кривой, для определения функции $w = u + iv$ от $z = x + iy$ достаточно задать граничное распределение значений u и значение v в одной точке области. Можно, наоборот, задать граничное распределение v и значение u в точке; можно, наконец, задать в каждой точке контура соотношение $\varphi(u, v)$ или для каждой пары граничных точек два соотношения, связывающие значения u и v в этих точках.

Во всех рассуждениях Риман опирался на так называемый принцип Дирихле: среди всех возможных функций, имеющих одинаковые граничные распределения в области G , та функция, которая доставляет

$$\min I = \min \iiint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

будет гармонической в заданной области. Это предложение Риман узнал, по-видимому, из лекций Дирихле. Однако оно было известно также Гауссу, Томсону, Кирхгофу в связи с решением задач математической физики (теория потенциала). Ему был придан вполне определенный физический смысл: интеграл I выражает кинетическую энергию установившегося течения однородной несжимаемой жидкости, где u — потенциал скоростей.

Пусть, например, задан двумерный случай: интеграл

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

определен для площади круга, причем задано непрерывное граничное распределение u . Этот интеграл неотрицателен. Тогда существует, по мнению Римана, неотрицательная нижняя грань значений интеграла, которая достигается. Тем самым утверждается существование функции u с заданным граничным распределением, сообщающей минимум данному интегралу. Для этой функции:

$$\delta \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0,$$

откуда как необходимое условие вытекает

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Однако Риман не смог дать доказательство существования функции u , обращающей интеграл I в минимум. Более того, Вейерштрасс, узнав о вышеуказанных рассуждениях Римана, привел пример множества допустимых (непрерывных, дифференцируемых, принимающих на границе заданные значения) функций, не включающего в себя функцию, соответствующую нижней грани. Таково будет, например, множество всех кривых с непрерывной кривизной, соединяющих точки A, C, B . Кратчайшей линией является ломаная ABC , не входящая в рассматриваемое множество, так как непрерывность кривизны нарушается в точке C (см. рис. 13 на стр. 239).

Римановы теоремы существования, возникшие из физических аналогий, сделавшись объектом споров, надолго повисли в воздухе. Они были доказаны Шварцем (1870) и Нейманом (1884) иными путями, а обоснованность суждений Римана удалось доказать лишь Д. Гильберту (1901—1909), применившему для этой цели прямые методы вариационного исчисления. В более общей форме этот вопрос был исследован Р. Курантом и Г. Вейлем.

Другая группа аналогий, введенных Риманом, имеет своим исходным пунктом геометрическую интерпретацию комплексных чисел и функций комплексного переменного. К тому времени уже было известно, что аналитические функции комплексного переменного определяют конформное отображение одной плоскости на другую, причем не обязательно

взаимно однозначное. С этим пересекается представление об аналитической функции, получающейся из начального элемента непрерывными продолжениями, определяемыми уравнениями Даламбера—Эйлера. Возможное разнообразие продолжений, а также стремление преодолеть неоднозначность конформных отображений, по-видимому, привели Римана к идее специальных поверхностей, в необходимых случаях многолистных; за этими поверхностями укрепились и до сих пор существует название римановых.

Факты теории функций комплексного переменного, будучи распространены на римановы поверхности, приобретают большую общность. Кроме того, Риман установил связь между

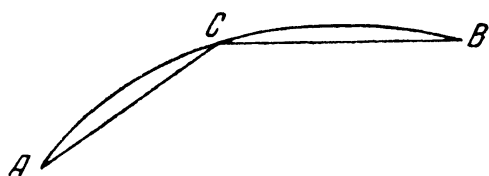


Рис. 13

обоими типами аналогий, используя физическую интерпретацию для получения теорем существования для функций на замкнутых многолистных римановых поверхностях. Эти поверхности рассматриваются как однородные проводники.

При подключении к ним батареи возникает поле, потенциал которого u однозначен, непрерывен и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ на всей поверхности. Точки подсоединения батареи являются точками разрыва функции u , которая ведет себя в этих точках как $\ln r_1$ и $\ln r_2$ соответственно. Так, получается теорема существования: на всякой замкнутой римановой поверхности существует потенциальная функция u , всюду непрерывная, кроме двух заранее выбранных точек, где u делается логарифмически бесконечной. Мнимая часть v на данной римановой поверхности находится после соответствующих разрезов, обеспечивающих однозначность ветвей функции $u + iv$, что приводит к необходимости подсчета модулей периодичности.

Тот цикл работ Римана, который мы здесь рассматриваем, положил начало большой и важной области современной теории функций, известной ныне под объединяющим названием — геометрической. В этих работах содержится глубоко разработанная теория конформных отображений, в том числе основная теорема о существовании и единственности (при подходящих условиях) конформного отображения на круг произвольной односвязной области (граница которой содержит более одной точки).

В этих работах содержится ряд топологических по суще-

ству результатов, вроде теоремы, что число разрезов поверхности, необходимых для превращения ее в односвязную, не зависит от выбора системы разрезов. Через несколько десятков лет, на рубеже XIX и XX вв., топологические идеи Римана, не получившие у своего автора достаточно строгого оформления, влились в формирующуюся топологию.

Риману принадлежит другая замечательная идея о применении функции комплексного переменного

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

(широко теперь известной под названием: дзета-функция Римана) к определению количества простых чисел на заданном отрезке натурального ряда. Вместе с исследованиями Чебышева¹ результаты, полученные здесь Риманом, кладут начало аналитической теории чисел. Гипотезы Римана о свойствах дзета-функции, в особенности гипотеза, что все ее нетривиальные нули лежат на прямой $x = +\frac{1}{2}$, несмотря на огромные усилия, остались до сих пор недоказанными.

Наконец, мы не можем не обратить внимание читателей еще на один цикл работ Римана, идейно близких к его геометрической теории функций комплексного переменного. Речь идет об исследованиях различных классов функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с алгебраическими коэффициентами. Рассматривается семейство функций

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i.$$

Функции y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — аналитические во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа точек a_j ($j = 1, 2, \dots, k$). При обходе около этих точек заданные функции подвергаются линейному преобразованию, тоже определенному для каждой точки. Затем рассматривается совокупность всевозможных замкнутых путей, не проходящих через точки a_j . Ей соответствует множество линейных преобразований заданного семейства функций — его группа монодромии. Задача состоит в том, чтобы, опираясь на эти соображения, построить дифференциальное уравнение, решениями которого были бы все функции заданного семейства.

¹ См. о них в главе XII.

Эти исследования Римана, хотя также незавершенные (их сумел завершить лишь в XX в. Д. Гильберт), дают основание считать его одним из основателей аналитической теории дифференциальных уравнений. Других идей и работ Римана мы здесь не сможем коснуться, чтобы не отойти слишком далеко от основного замысла настоящей главы.

Геометрическая теория функций комплексного переменного получила быстрое развитие тотчас после безвременной смерти Римана. Уже к концу 60-х годов прошлого века появилось большое количество работ, авторы которых разрабатывали отдельные аспекты теории функций комплексного переменного, отправляясь от идей Римана. Появившаяся в связи с этим необходимость возможно более полного изучения научного наследия Римана привела к появлению в 1876 г. собрания его сочинений, изданного Г. Вебером и Р. Дедекин-дом. В 1902 г. появились важные добавления к этому собранию сочинений, подготовленные В. Виртингером и М. Нетером. На русском языке том сочинений Римана вышел в свет в 1948 г. Он был подготовлен В. Л. Гончаровым. К его содержательному обзору научных работ Римана и комментариям мы и отсылаем читателя.

Аналитическое направление развития теории функций комплексного переменного. Другое направление развития теории функций комплексного переменного в XIX в., за которым закрепилось в истории название «аналитическое», сформировалось в работах К. Вейерштрасса (1815—1897). В сферу научных интересов последнего входили преимущественно проблемы математического анализа: его классических основ, теории функций комплексного переменного, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии. Для этой широкой области К. Вейерштрасс всю жизнь разрабатывал систему логического обоснования, опирающуюся на строгую теорию действительного числа как среды, в которой функционируют все основные понятия и методы. Именно в его лекциях был построен в основном современный стандарт строгости в математическом анализе и ставшая традиционной структура.

Те же цели строгого и систематического построения преследовал К. Вейерштрасс, создавая последовательно и настойчиво теорию функций. Уже в 1841 г. он сумел обобщить теорему Коши о разложении в степенной ряд функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в кольце, образованном двумя концентрическими окружностями. Искомый ряд содержал члены с положительными и

отрицательными степенями и был по существу рядом Лорана. Последний, как было отмечено выше, отыскал этот ряд в 1843 г., и историческая традиция сохранила за этим рядом его имя. Результаты же К. Вейерштрасса, долго не попадавшие в печать, были известны меньше. Они распространялись преимущественно через посредство слушателей его лекций. Около 1842 г. К. Вейерштрасс овладел идеей аналитического продолжения.

Однако в эти годы главные интересы К. Вейерштрасса сосредоточивались на изучении конкретных классов функций: эллиптических, гиперэллиптических и абелевых функций и сопредельных с ними вопросов. Общие концепции в теории функции комплексного переменного начали вырабатываться в лекциях, которые К. Вейерштрасс в течение долгих лет читал в Берлинском университете. Помимо лекций об эллиптических функциях, их приложениях к геометрическим и механическим задачам об абелевых функциях и вариационном исчислении начинают появляться его курсы по теории аналитических функций. С 1856 г. К. Вейерштрасс читал лекции о представлении функций сходящимися рядами, а с 1861 г. — об общей теории функций. Наконец, появились специальные сочинения К. Вейерштрасса: «К теории однозначных аналитических функций» (1876) и «К учению о функциях» (1880), в которых его теория аналитических функций приобрела известную завершенность.

В основе теории К. Вейерштрасса лежит понятие степенного ряда. Для него определяется круг сходимости и вводится определение равномерной сходимости. Далее рассматриваются лишь равномерно сходящиеся ряды. Относительно них последовательно доказаны теоремы: а) если ряд сходится равномерно в окрестности каждой точки, лежащей внутри или на границе данной области, то он сходится равномерно во всей области; б) если дана последовательность степенных рядов

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \dots$$

и две вещественные величины R и R' , такие, что $0 \leq R \leq R'$ и $R \leq |x| \leq R'$, то для этих значений x ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)$$

равномерно сходится и существует

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

Затем вводится понятие элемента функции

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Для этого в области сходимости ряда К. Вейерштрасс выбирает точки a_0 . В ее окрестности как функции $f_k(x)$, так и $F(x)$, выражаются степенным рядом.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x - a_0)^k = P_0(x - a_0),$$

который и получил у Вейерштрасса название элемента функции $F(x)$.

Пусть затем точка a_1 лежит в окрестности a_0 и $P_1(x - a_1)$ — соответствующий элемент функции $F(x)$. Для тех x , которые лежат как в окрестности a_0 , так и в окрестности a_1 , имеет место

$$P_1(x - a_1) = P_0(x - a_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_0^{(\mu)}(a_1 - a_0) \frac{(x - a_1)^\mu}{\mu!},$$

где

$$P_0^{(\mu)}(a_1 - a_0) = \left[\frac{d^\mu P_0(x - a_0)}{dx^\mu} \right]_{x=a_1}.$$

Если a — произвольная точка в области сходимости, то между a_0 и a можно вставить последовательность точек: a_1 из окрестности a_0 , a_2 — из окрестности a_1 и т. д. вплоть до a_n , попадающей уже в окрестность a . Для соответствующих элементов функции $F(x)$ имеют место:

$$P_1(x - a_1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_0^{(\mu)}(a_1 - a_0) \frac{(x - a_1)^\mu}{\mu!};$$

$$P_2(x - a_2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_1^{(\mu)}(a_2 - a_1) \frac{(x - a_2)^\mu}{\mu!};$$

• • • • •

$$P(x - a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_n^{(\mu)} (a - a_n) \frac{(x - a)^\mu}{\mu!}.$$

Таков же алгоритм образования по произвольному элементу в области сходимости всякого другого элемента $F(x)$ в той же области.

Может случиться, что область сходимости ряда $P(x - a)$ будет выходить из первоначальной. Тогда из $P_0(x - a_0)$, применяя указанный алгоритм, можно образовать множество рядов, область сходимости которых выходит за пределы первоначальной. Так строится полная аналитическая функция $F(x)$, как совокупность всех продолжений какого-либо элемента. Затем проводятся исследования: особых точек на границах круга сходимости, однозначности и многозначности функций, поведения целой функции в бесконечности, разложения функции в произведение и других конкретных вопросов теории. Аппарат отличается единообразием; это — степенные ряды, операции с ними, оценки, зачастую весьма тонкие.

Вслед за работами К. Вейерштрасса, в течение последней четверти XIX в., появилось большое количество работ по аналитической теории функций комплексного переменного. Среди них видное место занимают работы учеников Вейерштрасса — С. В. Ковалевской и Миттаг-Леффлера, а также Ш. Эрмита, Э. Пикара, Э. Лагерра, А. Пуанкаре и др. Лекции Вейерштрасса послужили на много лет прообразом учебников по теории функций комплексного переменного, которые начали появляться с тех пор довольно часто.

Превращение теории функций комплексного переменного в комплекс аналитических дисциплин. В конце XIX в. теория функций комплексного переменного чрезвычайно разветвилась, превратившись в обширный комплекс дисциплин. В нее теперь входит геометрическая теория функций, основанная на теории конформных отображений и римановых поверхностях. Получили цельную форму теории различных видов функций: целых и мероморфных, эллиптических и модулярных, автоморфных, гармонических, алгебраических. В тесной связи с последним классом функций развилась теория абелевых интегралов. К этому комплексу примыкала создающаяся аналитическая теория дифференциальных уравнений и аналитическая теория чисел. Теория аналитических функций установила и укрепила связи с другими математическими дисциплинами.

Изменился за это время и характер научных исследований в области теории функций комплексного переменного. Вначале, как было показано выше, большинство этих исследований проводилось в плане развития одного из трех направлений: теории моногенных или дифференцируемых функций Коши, геометрических и физических идей Римана, аналитического направления Вейерштрасса. Лишь постепенно различия и связанные с ними споры преодолеваются. На рубеже XX в. появляется и быстро растет число работ, в которых осуществляется синтез, казалось бы разнородных, идей и методов. Создается единая, общая концепция теории функций комплексного переменного, находящая свое выражение в структуре монографий, учебников и в характере методов исследования. Одним из основных понятий, на котором явно обнаружились связь и соответствие геометрических представлений и аппарата степенных рядов, было понятие аналитического продолжения. Из многочисленных примеров, которые можно было бы привести в подтверждение этого тезиса, наиболее ярким является работа Адамара — «Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение» (1901). В ряде работ Пуанкаре, Клейна и Кёбе была показана связь геометрии Лобачевского с римановыми поверхностями и значение неевклидовой геометрии в изучении этих поверхностей и свойств связанных с ними аналитических функций.

Ф. Клейн развил физические интерпретации функций комплексного переменного в работе «О римановой теории алгебраических функций и их интегралах» (1881). Огромную роль в истории аналитических функций сыграли труды Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, открывшие необозримую область ее приложений в аэро- и гидромеханике. Аналитическая теория дифференциальных уравнений явилась своеобразным поставщиком различных специальных функций, разрабатываемых средствами теории аналитических функций: модулярные функции Эрмита, автоморфные — Клейна и Пуанкаре, функции Шварца и т. д. При построении аналитической теории дифференциальных уравнений широко использовались материалы из разных областей теории аналитических функций. Так поступал, например, Фукс — ученик Вейерштрасса.

В теорию аналитических функций в качестве элементов единой основы был внесен ряд понятий из теории множеств Кантора, из теории функций действительного переменного (К. Жордан, Э. Борель, А. Лебег, Т. Стильтес, Р. Бэр), теории групп и топологии. Своеобразие основных понятий, та-

ких, как область, ее граница, предел, связность, сходимость, аналитичность, непрерывность и др., подверглась глубокому логическому анализу и уточнению, что укрепляло единство воззрений на все вопросы теории.

Общая теория функций комплексного переменного проникла и в педагогическую практику, породив два типа учебников: а) книги, специально посвященные этому вопросу; б) общие курсы математического анализа, куда эта теория входит как составная часть. Учебники второго типа к началу XX в., по-видимому, преобладали. Примером могут служить курсы Бертрана, Пикара и, наконец, Гурса, который в «Курс математического анализа» (1902) включил теорию аналитических функций (второй том, первая часть).

Позднее, с расширением учебных программ в части, относящейся к рассматриваемой теории, оба типа учебной литературы получили равные права и применяются в зависимости от общих задач данного учебного заведения.

ГЛАВА XI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В XIX в.

Геометрические науки к началу XIX в. Геометрия к началу XIX в. представляла уже большой комплекс дисциплин, выросших из анализа и обобщения данных о пространственных формах тел, использующих методы других областей математики и в силу этого тесно переплетенных с ними. Помимо элементарных частей в геометрию входили почти все те части, которые и ныне составляют структуру ее высших областей, развитие которых является актуальной задачей современной математики.

Аналитическая геометрия, возникшая еще в XVII в., завершила большой путь развития и определила свое место как часть геометрии, изучающая фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями с помощью координатного метода и использующая методы алгебры. Помимо ее учебной и прикладной роли в ней самой наметились тенденции развития, состоящие в усовершенствовании и обобщении координатного метода, а также в усилении аналитичности при исследовании геометрических образов, что особенно важно для приложений. Первая из этих тенденций нашла, как известно, воплощение во введении различных избыточных координат. Мы имеем в виду однородные координаты, представляющие отношения двух переменных к третьей, проективные, т. е. линейные, комбинации однородных координат, введенные Г. Дарбу тетрациклические и пентасферические координаты и др. Вторая из тенденций привела к включению в аналитическую геометрию векторных методов.

Дифференциальная геометрия заняла, как было показано в главе V, видное место в геометрии к концу XVIII в. Характерное для этой части геометрии использование понятий и методов дифференциального исчисления обусловило прочные и далеко идущие связи ее с математическим анализом и с многочисленными прикладными задачами. В начале XIX в. для дифференциальной геометрии раскрылись новые возможности развития, благодаря введению Гауссом (1824) внутренней геометрии поверхностей. В процессе создания общей теории поверхностей дифференциальная геометрия приобрела новые связи, преимущественно с неевклидовыми геометриями.

Казалось бы, приостановившиеся в своем развитии со времен Дезарга и Паскаля методы изучения свойств фигур, инвариантных относительно проектирования, в 20-х годах XIX в. сформировались в работах Ж. Понселе и др. в новую область геометрии — проективную геометрию. Выделение проективных свойств фигур в отдельный класс и установление соответствий между метрическими и проективными свойствами явились предметом многих исследований, осуществлявшихся как синтетическими методами (Штейнер, Шаль, Штаудт и др.), так и аналитическими (Мёбиус, Штуди, Картан и др.). В систему современной геометрии проективная геометрия вошла как часть, обладающая высокой общностью, могущая включить в единую систему многие геометрические теории. Такому положению проективная геометрия обязана влиянию геометрии Лобачевского и последующих исследований А. Кэли и Ф. Клейна.

Изменения, внесенные в геометрию со стороны указанных ее областей, весьма значительны. Однако коренная перестройка всего содержания геометрии и ее структуры определялась не этими изменениями. Принципиально новое содержание было внесено в нее геометрией Лобачевского. Поэтому мы в основном и посвятим дальнейшее изложение истории открытия геометрии Лобачевского и вообще неевклидовых геометрий, а также их влиянию на формирование современной геометрии.

Открытие геометрии Лобачевского и ее некоторые характерные особенности. Создатель неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) родился в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький) в семье бедного чиновника. Он окончил Казанский университет (1811) и работал в нем много лет. Вскоре (с 1816 г.) он был уже профессором, а еще через несколько лет — ректором (с 1827 до 1846 г.) это-

го университета. Благодаря его усилиям Казанский университет превратился, невзирая на неблагоприятную обстановку того времени, в первоклассное учебное заведение. Много сил Н. И. Лобачевский потратил на улучшение деятельности школ.

Мировоззрение Лобачевского было материалистическим. Во взглядах на основные понятия математики, в частности геометрии, он твердо подчеркивал их материальное происхождение, рассматривая их как отражения реально существующих отношений вещей действительного мира. Математические абстракции не могут рождаться по произволу, они появляются как результат взаимоотношений человека с материальным миром. Научное познание имеет единственную цель: изучение реального мира. Критерием истинности научного познания является, по Лобачевскому, практика, опыт.

Математиком он был широким. Его научное наследие включает в себя серьезные работы по алгебре («Алгебра или вычисление конечных», 1834 и др.) и математическому анализу («Об исчезновении тригонометрических строк», 1834; «О сходимости бесконечных рядов», 1841; «О значении некоторых определенных интегралов», 1852 и др.). Он первый ввел различие между непрерывностью и дифференцируемостью функций, нашел метод численного решения алгебраических уравнений, известный под его именем, и др. Однако наивысшую, можно сказать бессмертную, славу Лобачевский заслужил своими работами по геометрии.

Отправным пунктом исследований Лобачевского по неевклидовой геометрии была аксиома о параллельных. Как известно, дедуктивно построенная система евклидовой геометрии опирается на некоторую совокупность аксиом. Как показал позднее Д. Гильберт, эти аксиомы вводят различные аспекты понятий: соединения или принадлежности, порядка, движения или конгруэнтности, непрерывности и параллельности¹. Последняя из этих аксиом (фигурирующая в «Началах» Евклида в качестве пятого постулата) стоит как бы особняком. За ней в силу сложности формулировки не было признано свойство очевидности, и в течение многих веков предпринимались попытки дать ее доказательство, разумеется, безуспешные.

Геометрия, в зависимости от того, используется ли аксиома о параллельных или нет, делится на две части. Та часть, куда входят предложения, не опирающиеся на эту аксиому,

¹ См. К. А. Рыбников. История математики, ч. 1, стр. 41—42.



Н. И. Лобачевский
1792—1856

носит название абсолютной геометрии. Лобачевский, который вначале пытался дать доказательство упомянутой аксиомы, вскоре убедился в возможности расчленения геометрии на абсолютную и неабсолютную и осуществил его. Вслед за этим он попробовал заменить аксиому о параллельных ее отрицанием: он предположил, что через точку, не лежащую на данной прямой, может проходить более чем одна прямая, лежащая в одной плоскости с прямой и не пересекающаяся с ней при продолжении. При этом он обнаружил, что формального противоречия не получается, а система выводов складывается в новую геометрию, отличную от евклидовой, но столь же логически строгую и последовательную, несмотря на непривычность, странность ее утверждений.

День рождения неевклидовой геометрии настал. 11(23) февраля 1826 г. на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета Лобачевский доложил о своем сочинении: «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Через три года, в 1829 г., он издал это сочинение в расширенном виде под названием: «О началах геометрии». В последующем, в течение всей жизни, Лобачевский развивал свою новую геометрию, опубликовав ряд работ: «Воображаемая геометрия» (1835; немецк. 1837), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1838; немецк. 1840), «Пангеометрия» (1855).

Попытки доказать аксиому о параллельных приведением к противоречию имели место и до работ Лобачевского. Саккери (1733) даже получил ряд предложений, которые затем ошибочно признал противоречивыми, а следовательно, аксиому о параллельных — доказанной. И. Ламберт около 1766 г. (опубликовано в 1786 г.), следуя по тому же пути, не смог ни примириться с получающейся системой выводов, ни опровергнуть ее. Аналогичные исследования предпринимали Ф. Швейкарт (1818) и Ф. Тауринус (1825). Однако только венгерский математик Я. Больяи (1802—1860) ясно выразил ту же мысль, что и Лобачевский, и к 1832 г., независимо от последнего, развил систему неевклидовой геометрии, выпустив сочинение: «Аппендикс, т. е. приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную». После смерти Гаусса (1855) выяснилось, что он тоже открыл начальные факты геометрии Лобачевского, но молчал о них, из боязни уронить свою научную репутацию. Он даже не решился поддержать молодого Я. Больяи, когда тот прислал ему свою

работу. Подлинное мужество ученого, свойственное Лобачевскому, особенно ярко проявилось в обстановке непризнания и нападков, созданной вокруг его работ, и не преодоленной им до самой смерти.

Геометрия Лобачевского в абсолютной своей части не отличается по существу от геометрии Евклида. В той же части, которая использует аксиому о параллельных, дело обстоит иначе. К этой части относятся теоремы о: а) расположении параллельных прямых;

б) сумме углов в треугольниках и многоугольниках;

в) площадях; г) вписанных в окружность и описанных многоугольниках;

д) подобия и конгруэнтности фигур;

е) тригонометрии; ж) теореме Пифагора;

з) измерении круга и его частей. В этих пунктах двумерная геометрия Лобачевского отличается от евклидовой планиметрии.

Рассмотрим конкретнее некоторые особенности геометрии Лобачевского.

Допущение, что через точку O вне прямой можно провести больше одной прямой, не встречающейся с данной, приводит к выводу, что таких прямых бесконечно много. Они образуют пучок. В пучке этих прямых есть две крайние прямые: OB и OB_1 . Они и называются параллельными прямой O_1A . Теперь возникает необходимость ввести направление параллельности. В направлении параллельности прямые сближаются, в противоположном — удаляются. Угол параллельности α зависит от расстояния между параллельными, т. е. от длины соответствующего перпендикуляра x , следующим образом:

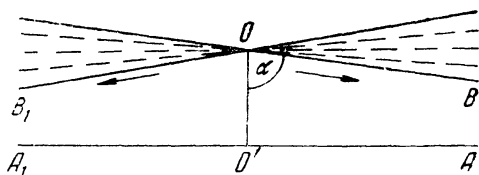


Рис. 14

$$\alpha = \pi(x); \quad \operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

где k — постоянная, зависящая от выбора единицы длины.

Если $x \rightarrow 0$, то $\pi(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$; в случае же $x \rightarrow \infty$ $\pi(x) \rightarrow 0$.

Наконец, прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся в обе стороны.

Вслед за тем оказывается, что сумма углов треугольника меньше $2d$. При увеличении сторон треугольника эта сумма уменьшается. Аналогичные суждения справедливы и для

многоугольников. Вследствие этого стало необходимым выдвинуть еще один признак равенства треугольников, исходя из равенства трех пар соответствующих углов.

Площади всех треугольников образуют множество с верхней гранью $s \cdot \pi$, где s — постоянная, зависящая от выбора единицы измерения площадей, равная отношению площади треугольника к его дефекту (разности суммы внешних углов треугольника и $4d$). В геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников и многоугольников. Допущение подобия эквивалентно постулату Евклида о параллельных. Длина окружности l растет быстрее радиуса r и равна

$$l = \frac{\pi}{k} (e^{kr} - e^{-kr}).$$

Дальнейшее развитие геометрии Лобачевского связано с введением пучков прямых: сходящихся, расходящихся и параллельных. Относительно пучков прямых вводятся циклы

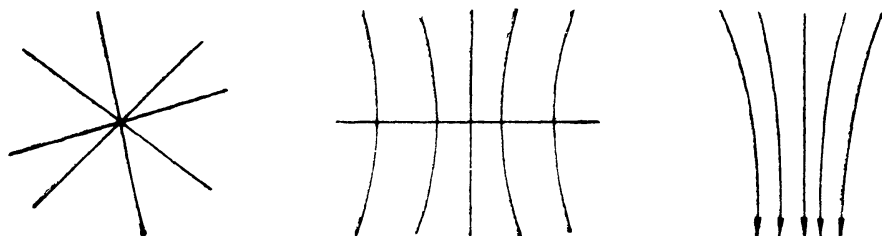


Рис. 15

(иначе называемые s -линиями, или основными линиями). Это — геометрические места точек, являющиеся ортогональными траекториями пучка прямых. Их положение определяется начальной точкой, выбранной на одной из прямых пучка. Эти циклы для трех видов пучков соответственно называются: окружность, эквидистанта (или гиперцикл) и орицикл (образ предельной окружности при $R \rightarrow \infty$). Соответствующие пространственные образы, образованные вращением циклов вокруг избранной прямой, соответственно будут: сфера, гиперсфера, орисфера. Лобачевский установил, что на орисфере, если прямые заменить орициклами, осуществляется планиметрия Евклида и тригонометрия.

Во все соотношения геометрии Лобачевского входит единица длины (масштаб), а углы и длины зависят друг от друга. Единицей длины является OR — длина абсолютной дуги орицикла (рис. 16). Это — дуга, отсчитываемая от избранной точки O на одной из параллельных прямых пучка до R —

пересечения орицикла с прямой пучка, параллельной касательной к орициклу в точке O . В настоящее время отрезок, равный по длине абсолютной дуге, называют также радиусом кривизны пространства Лобачевского.

Аппарат вычислений в геометрии Лобачевского основывается на оперировании с гиперболическими функциями. Например, теорема, аналогичная теореме синусов для треугольника, в геометрии Лобачевского приобретает вид:

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} ka} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{sh} kb} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} kc}.$$

Вся тригонометрия оказалась в основном тригонометрией гиперболических функций. Совокупность ее формул оказалась подобной совокупности формул сферической тригонометрии в системе Евклида, но для сферы мнимого радиуса Ri . Вслед за тригонометрией Лобачевский разработал в своей системе аналитическую и дифференциальную геометрии.

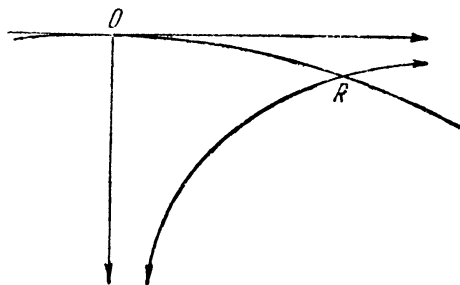


Рис. 16

В сочинениях Лобачевского была построена система, не содержащая логических погрешностей и столь же богатая фактами, как и геометрия Евклида. Тем самым было показано, что мыслима не только одна система геометрии и что другие системы можно получать путем видоизменений и обобщений основных положений геометрии Евклида. Однако прием, оказанный геометрии Лобачевского, был более чем обескураживающим. На его сочинения академики (в том числе Остроградский) давали отрицательные отзывы, в печати появились пасквилы на Лобачевского. Требовалось незаурядное мужество и вера в научную достоверность и значимость своих исследований, чтобы противостоять этому. Лобачевский проявил необходимые качества, боролся настойчиво, но умер в 1856 г. непонятым и непризнанным.

Проблема интерпретации геометрии Лобачевского и геометрических систем вообще. Задача, которую не смог решить Лобачевский, — это задача обоснования новой геометрии. Можно сколь угодно далеко идти по пути накопления ее фактов, но не получить уверенности: а) в строгости ее логической основы; б) в ее значимости для практических приложений; в) относительно ее места в науке. Лобачевский заме-

тил, что для бесконечно малых размеров его геометрия превращается в евклидову. Кроме того, сходство тригонометрических соотношений в обеих геометриях позволяло надеяться на скорое открытие связей между ними.

Путь Лобачевского в решении проблемы обоснования — поиски материальных объектов, для которых осуществлялась бы его геометрия. Вспомогательный путь приложения фактов

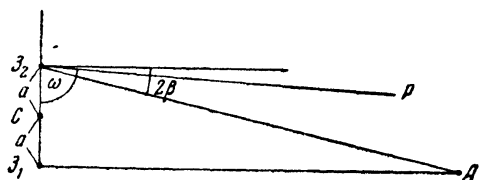


Рис. 17

геометрии к математическому анализу, в особенности к вычислению трудных интегралов, был также использован Лобачевским). Но вернемся к основным попыткам. Требуется, скажем, измеряя углы треугольников, обнаружить, отличается ли их сумма δ от $2d$, т. е. обнаружить дефект $\delta = 2d - \sigma$. Лобачевский доказал, что этот дефект должен быть прямо пропорционален площади треугольника S и обратно пропорционален квадрату радиуса кривизны пространства, т. е.

$$\delta = \frac{S}{r^2}.$$

Чтобы дефект был замечен, надо выбирать треугольники самых больших размеров. Поэтому Лобачевский занялся непосредственным измерением космических треугольников.

С положения Z_1 земли на орбите фиксируется некоторая звезда A , которая выбрана так, чтобы

$$\angle CZ_1A = \frac{\pi}{2}.$$

Если фиксировать ту же звезду A из противоположной точки Z_2 орбиты, то $\angle CZ_2A = 2d - 2\beta$. Величина β есть параллакс звезды, измеряемый обычно с большой точностью. Если космическое пространство имеет геометрию Лобачевского, то угол параллельности ω будет возможно определить. Однако все измеренные отклонения неизменно оказывались в пределах точности наблюдения, и эксперимент Лобачевского не удался.

Это теперь не представляется удивительным. Известно, что в 1931 г. Шиллинг доказал, что современные средства астрономической техники не могут ни доказать, ни опровергнуть предположения Лобачевского о геометрии космического пространства, если допустить, что радиус кривизны пространства превышает 60 световых лет. Неутешительные дан-

ные наблюдательной астрономии дополняет общая теория относительности, которая для изотропного мира дает значение радиуса кривизны $1,8 \cdot 10^9$ световых лет. Если же учесть, что геометрия космического пространства тесно связана с распределением и движением масс, заполняющих его и обладающих свойствами притяжения, то эта геометрия примет весьма сложную форму.

Тем не менее, несмотря на неудачи с экспериментом, Лобачевский находился на верном пути. Его идея — это идея интерпретации: данные всякой теории должны проверяться опытом. Геометрия Евклида возникла как обобщение многовекового опыта людей и подтверждена практикой. Возможная конструкция, созданная Лобачевским, должна опереться на систему реально существующих объектов, чтобы быть признанной непротиворечивой.

Как это часто бывает в истории математики, разгадка находилась рядом; математики уже имели все необходимое, чтобы решить проблему интерпретации геометрии Лобачевского. Необходимо было лишь привлечь данные теории поверхностей.

Мы уже упоминали, что дифференциальная геометрия в начале XIX в. получила новую область распространения в теории поверхностей. В трудах Гаусса, особенно в его «Рассуждении о кривых поверхностях», была построена внутренняя геометрия поверхностей. Для этого Гаусс использовал криволинейные координаты u и v на поверхности. Линейный элемент (дифференциал дуги)

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

и гауссова кривизна $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ дали возможность найти все элементы поверхности. Факты внутренней геометрии оказались инвариантными относительно изгибания поверхностей, т. е. таких деформаций последней, при которых линейный элемент остается инвариантным. С тех пор более столетия проблемы изгибаний и внутренней геометрии поверхностей являются важнейшими проблемами дифференциальной геометрии.

Около 1840 г. Ф. Миндинг, профессор университета в Дерпте (Тарту), изучал поверхности постоянной гауссовой кривизны. Среди поверхностей постоянной отрицательной кривизны он особо выделил поверхность вращения трактрисы

$$y = \pm \left[\sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right],$$

т. е. кривой, у которой длина отрезка a касательной от точки касания до базы OU постоянна. Кривизна этой поверхности:

$$K = -\frac{1}{a^2},$$

за что она названа псевдосферой.

Миндинг показал, что для любого треугольника, сторонами которого являются геодезические линии на поверхности постоянной кривизны K , имеет место соотношение:

$$\operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos \sqrt{k} \cdot b = \operatorname{ctg} \sqrt{k} a \cdot \sin \sqrt{k} b.$$

В случае $K > 0$ это одна из формул сферической тригонометрии. Если же $K < 0$, то после подстановки $\sqrt{k} = \frac{1}{ri}$ вследствие

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \cos ix = \operatorname{ch} x$$

формула получает вид

$$\operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \operatorname{ch} \frac{b}{r} = \operatorname{cth} \frac{a}{r} \cdot \operatorname{sh} \frac{b}{r}.$$

Из этой формулы можно вывести остальные формулы гиперболической тригонометрии. Тригонометрия геодезических треугольников на поверхности постоянной отрицательной кривизны оказалась гиперболической тригонометрией.

За пять лет до выхода этой работы Миндинга, в 1835 г., Лобачевский в «Воображаемой геометрии» показал, что требование аксиомы параллельности можно свести к вопросу о справедливости соотношений гиперболической тригонометрии. Результат Миндинга означал по существу, что внутренняя геометрия псевдосферы изоморфна планиметрии Лобачевского. Однако ни Миндинг, ни Лобачевский этого не заметили.

Обнаружил этот факт впервые итальянский геометр Е. Бельтрами. Он внимательно изучал сочинения Лобачевского по французским и итальянским переводам. При этом он увидел, что результаты одного его дифференциально-геометрического исследования содержат искомую интерпретацию геометрии Лобачевского.

Бельтрами исследовал задачу картографии: отобразить поверхность на плоскость таким образом, чтобы все геодезические линии на поверхности изображались прямыми на плоскости. Он установил, что такое отображение можно установить для сфер и для поверхностей постоянной отрицательной кривизны, а также обнаружил среди последних

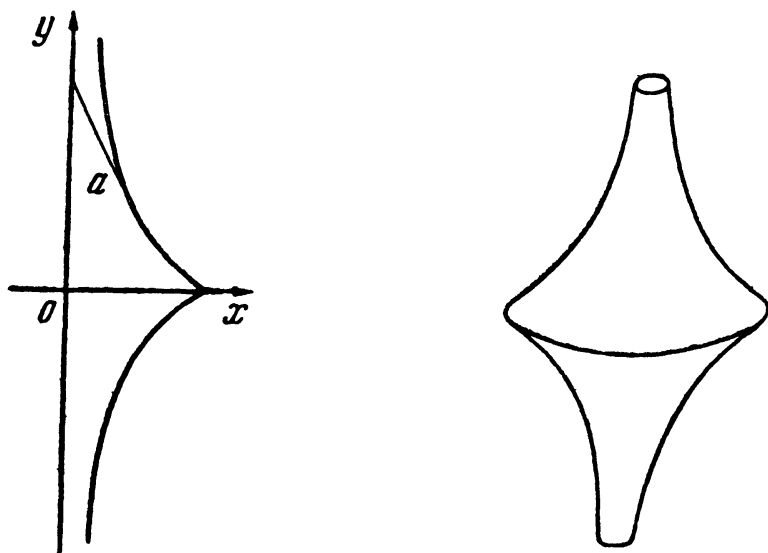


Рис. 18

псевдосферу. Линейные элементы (основные метрические формы) плоскости Лобачевского и псевдосферической поверхности оказались выраженными одной и той же формулой. Это означало, что внутренняя геометрия псевдосферы изоморфна внутренней геометрии гиперболической плоскости Лобачевского. Образом прямых Лобачевского явились геодезические на поверхности, а движения интерпретировались изгибаниями поверхности на себя.

Бельтрами опубликовал свои результаты в 1868 г. в статье: «Опыт истолкования неевклидовой геометрии». Это была первая интерпретация геометрии Лобачевского. Она произвела большое впечатление. После нее положение этой части геометрии изменилось. Сомнения в ее непротиворечивости отпали, так как плоскость Лобачевского интерпретировалась на поверхности евклидова пространства. Однако интерпретация была неполной, так как поверхность псевдосферы отображает лишь часть плоскости Лобачевского, что легко заметить на рисунке. Очевидно также, что никакие

комбинации бельтрамиевых поверхностей не устраняют неполноту.

Бельтрами смог таким образом доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского лишь для некоторой ограниченной части плоскости. Остался открытым вопрос об интерпретации всей плоскости Лобачевского. Только в 1901 г.

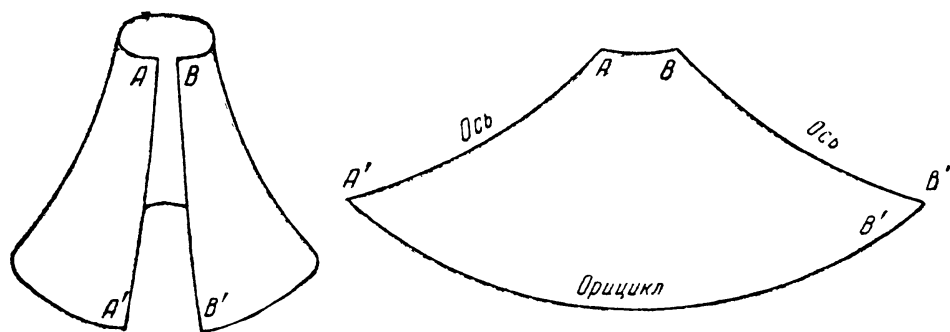


Рис. 19

Д. Гильберт доказал, что в трехмерном пространстве не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной. Поэтому осуществить интерпретацию типа Бельтрами всей плоскости Лобачевского невозможно.

Следующая по времени интерпретация, проведенная в 1871 г. Ф. Клейном в работе «О так называемой неевклидовой геометрии», основывается на введенном Кэли проективном мероопределении на плоскости. Кэли ввел это понятие в 1859 г. в «Шестом мемуаре о формах» следующим образом: Формы — это однородные многочлены. Для геометрического истолкования теории форм Кэли привлек аналитическую геометрию проективного пространства, построенную Плюккером. С бинарной формой он связал систему точек прямой, однородные координаты которых обращают эту форму в нуль. Аналогично, тернарная форма представляется кривой проективной плоскости; если эта форма квадратична, соответствующая кривая есть коническое сечение. Затем Кэли фиксирует одну из бинарных квадратичных форм и пару точек, соответствующую ей на прямой. Его определение абсолюта по существу вводит его как образ, относительно которого рассматриваются автоморфизмы. Для определения расстояния между двумя точками Кэли строит ангармоническое отношение этих двух точек и точек абсо-

люта. Логарифм ангармонического отношения и есть, по Кэли, расстояние. На плоскости абсолютом является кривая второго порядка; ее пересечение с любой прямой плоскости определит на ней абсолют проективной метрики.

Клейн в упомянутой выше работе доказал, что проективная метрика Кэли, определяемая действительной кривой второго порядка, совпадает с метрикой пространства постоянной отрицательной кривизны. Теперь Клейн может (и он именно это делает) отобразить плоскость Лобачевского на внутренность абсолюта, например, внутрь круга. Точки плоскости отображаются во внутренние точки абсолюта, прямые переходят в хорды без конечных точек, параллельные прямые — в хорды с общим концом. Движение — проективное преобразование, переводящее круг сам в себя и хорды — в хорды. Расстояние, как и у Кэли,

$$AB = \ln \left(\frac{AN}{AM} \cdot \frac{BM}{BN} \right).$$

В пространстве используется проективное отображение на внутренность сферы. Геометрия Лобачевского интерпретируется через посредство абсолюта Клейна (рис. 20). Напри-

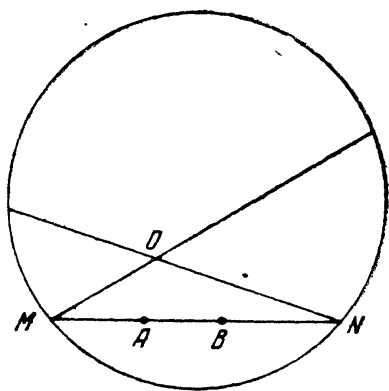


Рис. 20

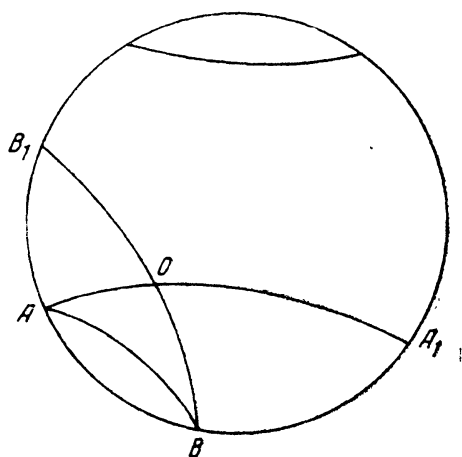


Рис. 21

мер, из точки O оказывается возможным провести две прямые OM и ON , не пересекающиеся с данной прямой MN и тем самым параллельные ей в смысле Лобачевского. Геометрия Лобачевского оказывается с этих позиций геометрией подгруппы всех проективных преобразований, при которой абсолют отображается сам в себя. Модель Клейна явилась

долгожданным полным доказательством непротиворечивости геометрии Лобачевского и наличия у нее реального смысла.

После этой работы Клейна появились и продолжают появляться новые интерпретации, обнаруживая новые связи геометрии Лобачевского с другими областями математики. Приведем для примера модель А. Пуанкаре, предложенную им в 1882 г. в связи с задачами геометрической теории функций комплексного переменного. Плоскость Лобачевского изображается тоже внутренностью круга (рис. 21), прямые — дугами окружностей, перпендикулярными данной окружности, и диаметрами. Движения интерпретируются комбинациями инверсий. Мы здесь имеем в виду гиперболическую инверсию, т. е. такие преобразования точек плоскости относительно окружности с центром O и радиусом r , когда каждой точке M на луче OM ставится в соответствие точка M' , такая, что $OM \cdot OM' = r^2$ ¹.

Разработка принципов классификации геометрических теорий. Наличие интерпретаций означало доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Точнее говоря, этим была доказана возможность сведения указанной проблемы к вопросу о непротиворечивости геометрии Евклида, а через нее к данным опыта. В свою очередь определившаяся равноправность по крайней мере двух геометрий — евклидовой и Лобачевского — повела: а) к появлению других различных геометрических систем; б) к необходимости выработать единые принципы классификации этих систем; в) к разработке аксиоматического метода и укреплению его положения как важнейшего метода всей геометрии и вообще математики современности.

Ф. Клейн внес в классификацию систем геометрии идеи теории групп. Коротко говоря, он отметил, что все движения, рассматриваемые в геометрии, образуют группу: произведение двух движений есть движение, каждое движение можно сопоставить с обратным ему движением. Геометрия Евклида и геометрия Лобачевского имеют разные группы движений. Если поставить вопрос более общим образом, то оказывается, что геометрия пространства характеризуется свойствами группы движений этого пространства. Именно: движение есть такое преобразование, которое позволяет сравнивать фигуры с одинаковыми свойствами. Таким об-

¹ См. Б. А. Розенфельд. Интерпретация геометрии Лобачевского. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. IX. Гостехиздат, М., 1956, стр. 169—208.

разом, выделяется совокупность свойств пространственных объектов, инвариантных относительно движения. Наука об этих свойствах и является геометрией.

Эти воззрения были изложены и развиты Ф. Клейном в речи, прочитанной им в 1872 г. при вступлении на кафедру в немецком городе Эрлангене. При опубликовании она носила название «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований». Однако в дальнейшем она сделалась гораздо более известной математикам как «Эрлангенская программа Ф. Клейна».

По Ф. Клейну, для построения геометрии необходимо задать: а) некоторое многообразие элементов; б) группу преобразований, дающую возможность отображать элементы заданного многообразия друг на друга. Геометрия должна будет изучать те отношения элементов, которые инвариантны при всех преобразованиях данной группы.

С этих позиций возможны, например, следующие геометрии: а) геометрия Евклида, изучающая инварианты перемещений; б) аффинная геометрия, объектом изучения которой являются инварианты так называемых аффинных преобразований:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1;$$

$$y' = a_2x + b_2y + c_2$$

при условии:

$$\det = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(в частном случае, когда $\det = \pm 1$, получаются ортогональные преобразования метрической геометрии); в) проективная геометрия, т. е. наука об инвариантах дробно-линейных преобразований

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3};$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3},$$

$$\det = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

При такой постановке вопроса геометрия Лобачевского трактуется как часть проективной геометрии, где изучаются инварианты подгруппы проективных преобразований, переводящей в себя точки некоторой окружности.

В классификацию Клейна помимо указанных входят многие другие геометрические системы. Например, конформная геометрия, охватывающая группу таких преобразований, которые переводят круги в круги, а также сохраняют углы. Другим примером может служить топология — геометрия групп непрерывных преобразований, т. е. таких, при которых сохраняется бесконечная близость точек.

Скоро будет сто лет, как идея Клейна о том, что геометрию можно строить на любом многообразии, в котором установлена группа преобразований, является руководящей не только в целях классификации геометрических теорий, но и для построения новых систем геометрии. Однако она не является единственной. В середине XIX в. появился еще один общий принцип рассмотрения геометрических теорий. Это был принцип, который мы условимся впредь называть метрическим. Впервые он изложен в общем виде в 1854 г. Риманом в ставшей впоследствии знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (опубликовано в 1867 г.).

Исходные идеи геометрических исследований Римана в первом приближении таковы. Для построения геометрической теории необходимо задать: а) многообразие элементов; б) координаты этих элементов (в общем случае n); в) закон измерения расстояний между бесконечно близкими элементами многообразий. Последний задается исходя из предположения, что геометрическое пространство в бесконечно малых частях евклидово. Это означает, что в самом общем виде задан линейный элемент дуги, определяемый дифференциальной квадратичной формой

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k.$$

Здесь

$$g_{ik} = g_{ik}(x_1, \dots, x_n);$$

$$g_{ik} = g_{ki}; \quad ds^2 \geq 0.$$

Указанная форма, очевидно, является обобщением гауссовой квадратичной формы во внутренней геометрии поверхностей:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Движения определены как преобразования, относительно которых линейный элемент ds инвариантен. Отсюда:

$$\sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k = \sum_{i,k} g'_{ik} dx'_i dx'_k.$$

Вслед за ds остаются в этом случае инвариантными длина кривой и другие соотношения, относящиеся к так называемой метрике пространства. Само понятие пространства, вслед за столь широким обобщением понятия расстояния между двумя точками, приобрело весьма общую трактовку (например, пространство цветов, фазовое пространство и т. д.). Это понятие быстро эволюционировало вплоть до современного представления о римановых пространствах как общих дифференциально-геометрических многообразиях с необходимыми уточнениями. Теория римановых пространств носит в настоящее время название римановой геометрии.

Риман не создал аналитического аппарата, адекватного столь широко задуманной на основе метрического принципа геометрии. Лишь к началу XX в., когда в трудах итальянских математиков Р. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивита оформилось тензорное исчисление как синтез теории алгебраических форм и теории квадратичных дифференциально-геометрических форм, оказалось, что оно является наиболее удобным аппаратом для разработки проблем римановой геометрии. Широкие обобщения понятия расстояния между двумя элементами и соответственно всех метрических суждений привели к введению понятия метрического пространства. Более узкая постановка вопроса в плане выяснения возможных разновидностей неевклидовой геометрии — геометрии пространств постоянной положительной кривизны — получила название геометрии Римана.

Становление аксиоматического метода в геометрии. Идея Лобачевского о том, что логически мыслима не одна геометрия Евклида, получила во второй половине XIX в. подтверждение; возникли многочисленные геометрические системы. Воплотилась в жизнь в виде разнообразных интерпретаций, а затем и приложений и другая его идея — что истинность геометрии проверяется лишь опытом и что расширяющийся опыт потребует введения не только евклидовой геометрии. Истинная природа пространства может оказаться и неевклидовой.

Третья большая идея Лобачевского, как было указано, состояла в том, что новые геометрии могут быть построены путем видоизменения и обобщения системы аксиом и вообще исходных положений евклидовой геометрии. Эта идея повлекла целую серию исследований по основаниям геометрии. Еще в 1866 г. Г. Гельмгольц ввел движение в качестве основного понятия геометрии. Г. Кантор (1871) и Р. Дедекин (1872) исследовали аксиому непрерывности. Паш (1882), добиваясь решения проблемы включения метрической геометрии в проективную, глубоко исследовал две группы аксиом: порядка и принадлежности (по позднейшей классификации аксиом, осуществленной Д. Гильбертом). Вслед за Пашем эти группы аксиом исследовали Д. Пеано (1889) и Пиери (1899). Наконец, в 1899 г. появилось первое издание «Оснований геометрии» Д. Гильберта, в котором впервые была изложена полная и достаточно строгая система аксиом геометрии.

Таким образом, к концу XIX в. в геометрии укоренился аксиоматический метод. С того же времени аксиоматический метод распространился и на другие области, сделавшись одним из основных методов современной математики. Геометрические теории оказались едва ли не самой удобной частью математики для становления аксиоматического метода. Вместо громоздкой системы определений, аксиом и постулатов, принятой в «Началах» Евклида, теперь сделалось возможным ввести лишь совокупность аксиом, которая и служит описанием основных понятий и их свойств. В геометрии же сложились первые требования логической строгости, которым должны удовлетворять аксиомы: требования их совместности и полноты. Совместность включила в себя требования независимости и непротиворечивости. Последняя доказывается построением интерпретаций и по существу эквивалентна этому построению. Независимость какой-либо аксиомы устанавливается заменой ее отрицанием с последующим построением интерпретаций с целью доказать непротиворечивость новой системы. Полнота системы аксиом получила общепринятое понимание как свойство определять систему объектов с точностью до изоморфизма. В отличие от геометрии, аксиоматика теории групп, например, не может быть полной, так как существуют группы с неизоморфной структурой.

Аксиомы геометрии, как и вообще математические аксиомы, не являются вечными априорными истинами. Критерий их истинности лежит в практике; на каждом этапе истори-

ческого развития математики выявляется их относительность. Большая роль аксиоматического метода не может затенить реальное происхождение аксиом, не может служить основанием для их идеалистических оценок. По справедливому выражению Ф. Энгельса, «выведение математических величин друг из друга, кажущееся априорным, доказывает не их априорное происхождение, а только их рациональную взаимную связь»¹.

Развитие геометрии в XX в. из-за громадного фактического объема и сложности связей не оказалось возможным включить в состав настоящей главы. Первоначальное представление об этом предмете читатель может получить, например, из статьи А. Д. Александрова «Геометрия»², к которой приложена хорошо подобранная библиография.

¹ Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. Госполитиздат, М., 1950, стр. 37.

² А. Д. Александров. Геометрия. БСЭ, изд. 2, т. 10, стр. 533—550.

ГЛАВА XII

О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ

Состояние научных исследований по математике к началу XIX в. В предшествующих главах приведено сравнительно много сведений о наиболее важных вкладах в науку, внесенных выдающимися математиками России. Эти материалы свидетельствуют о возрастании объема и удельного веса научных исследований наших отечественных ученых и могут дать некоторое представление об уровне и характере развития математики в России в XVIII и XIX вв.

Однако приведенные сведения оказались отрывочными, потому что выбор их был подчинен целям общего характера, стоявшим перед автором при написании той или иной главы. Представилось необходимым дополнить указанные сведения кратким, по возможности связным очерком развития математики в России. При этом мы будем стремиться избегать повторений ранее приведенных материалов.

В XVIII в. в России существовало только два учебно-научных центра: Петербургская академия наук (основана в 1725 г.) и Московский университет (открыт в 1755 г.). Научная деятельность в области математики и смежных дисциплин полностью исчерпывается трудами Л. Эйлера и его немногочисленных учеников. Гигантские по количеству и важности результаты Эйлера оставались все же изолированным явлением, не находили широкого научного отклика в России, где слой образованных людей был еще весьма невелик. Также не нашли непосредственного развития многие замечательные мысли М. В. Ломоносова о математике, ее значении и характере ее методов. Московский же уни-

верситет выполнял в XVIII в. по преимуществу учебные функции.

Положение начало изменяться в первой половине XIX в., когда под натиском нового, капиталистического производства в России, несмотря на сопротивление царизма, были проведены некоторые реформы. Возросшая при этом роль науки и образования для экономики России нашла свое выражение, в частности, в основании ряда университетов. Начало XIX в. было ознаменовано появлением университетов: Тартусского (1802), Вильнюсского (1803), Казанского (1804), Харьковского (1805), Петербургского (1819) и Киевского (1834). Во второй половине XIX в. к ним примкнули еще три университета: Одесский (1865), Варшавский (1869) и Томский (1888). Ко времени Великой Октябрьской социалистической революции в России насчитывалось всего 11 университетов (в 1909 г. был открыт Саратовский университет).

В каждом из университетов с момента его организации учреждались физико-математические факультеты и кафедры математики (в Саратовском университете это произошло лишь в 1918 г.).

Деятельность университетов, руководивших в то время также всеми средними и низшими учебными заведениями, была важнейшей частью создания основ для развертывания научных исследований по математике. Другими частями этого важного для истории науки процесса были: повышение уровня преподавания математики в средних учебных заведениях, издание специально математической литературы, в том числе журналов, появление научных математических обществ.

В университетах к середине XIX в. начала разворачиваться серьезная научная деятельность. Этому сопутствовало объединение в ряде городов ученых-математиков на основе общей тематики, приведшее к образованию научных школ. Этот термин мы будем применять к сравнительно многочисленным группам ученых, поддерживающих научные связи и объединяемых общностью научного направления, выделяющегося либо классом решаемых теоретических проблем или задач, либо своеобразием применяемых методов.

Первым научным центром в области математических исследований оказался Петербург, точнее Петербургская академия наук. Вслед за тем вокруг университетов стали складываться другие математические центры и школы: в Казани, Москве, Киеве, Харькове и других городах.

В дальнейшем мы сможем уделить основное внимание развитию лишь Петербургской и Московской математических школ. В отношении других центров мы будем вынуждены ограничиться краткими замечаниями.

Петербургская математическая школа. После смерти Л. Эйлера (1783) наступило снижение уровня математических исследований в Петербурге. Новый подъем обозначился лишь в 20-е годы XIX в. Он был связан с деятельностью М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского. Оба они являлись уроженцами Украины, оба получили серьезную научную подготовку в Париже — самом значительном в то время центре математической науки. Это обстоятельство определило идейное родство и связь работ петербургских математиков с ведущими идеями лучших математиков того времени.

Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861) окончил Харьковский университет в 1820 г. Он был учеником прогрессивного ученого, ректора университета Т. Ф. Осиповского. Борьба последнего с реакционным большинством профессоров, окончившаяся изгнанием Осиповского из университета, отразилась и на судьбе Остроградского, который не получил диплома. Остроградский продолжал свою подготовку в Париже (1822—1828) и возвратился на родину уже ученым с высокой научной репутацией. Он обосновался в Петербурге, будучи вначале (1828) избран адъюнктом, а затем (с 1830 г.) академиком. Кроме того, Остроградский вел преподавание в ряде технических и военных высших учебных заведений.

Научные интересы Остроградского развивались в тесной связи с актуальными для парижских математиков проблемами. Он даже большинство работ написал и опубликовал на французском языке.

Собрание сочинений М. В. Остроградского на русском языке было издано только в 1959—1961 гг. Академией наук СССР.

Так же как и его современники (Фурье, Лаплас, Коши, Пуассон и др.), Остроградский основные усилия направлял на решение прикладных проблем. Большинство его работ относилось к области механики, математической физики и связанных с ними проблем математического анализа. Кроме того, он оставил после себя первоклассные работы по алгебре, теории чисел и теории вероятностей.

Центральное место в научной деятельности Остроградского занимают его работы по математической физике. Построение математической теории разных явлений физики

было в центре внимания крупнейших парижских математиков того времени, когда в Париже учился Остроградский. В 1822 г. появилась «Аналитическая теория тепла» Фурье, в 1825 г. завершен выход в свет пятитомной «Небесной механики» Лапласа, в 1826 г. была издана «Теория электромагнитных явлений» Ампера. В 1826 г. была написана и первая работа Остроградского (опубликована в 1832 г.). Она была посвящена задаче о распространении волн на поверхности жидкости в цилиндрическом бассейне. Несколько позже (1829) Остроградский решил ту же задачу для бассейна, имеющего форму кругового сектора.

Вернувшись в Петербург, Остроградский опубликовал «Заметку об интеграле, встречающемся в теории притяжения», где он дал оригинальный вывод уравнения Пуассона, которое он нашел и сообщил Коши еще в 1826 г. Вслед за тем он посвятил несколько мемуаров математической теории тепла. Здесь он развил метод Фурье для твердых тел в общей форме, а также впервые дал строгое решение задачи о распространении тепла в жидкости. Его заметка о теории тепла (1828 г., опубликовано в 1831 г.) содержит обобщение метода Фурье. Это обобщение состоит в основном: а) в определении характеристических чисел краевой задачи и соответствующих им фундаментальных функций (вообще говоря, не тригонометрических); б) в исследовании разложимости функций в ряд по фундаментальным функциям. При этом Остроградский открыл свойство попарной ортогональности фундаментальных функций, а также нашел формулу разложения по фундаментальным функциям:

$$f(x, y, z) = \sum \frac{u \int f(x, y, z) u' \omega}{\int u u' \omega}.$$

Здесь у Остроградского интегралы, разумеется, тройные по области, ω — дифференциал объема, u — фундаментальная функция, соответствующая данному слагаемому суммы, а отношения интегралов — обобщенные коэффициенты Фурье.

Особенностью этой работы Остроградского является также то, что он опирается на (упоминавшийся нами в главе IX)¹ принцип локализации. Доказательство общего разложения по фундаментальным функциям не проведено строго. Впрочем, последующие обобщения метода Фурье, достигнутые в работах Ламе и Дюгамеля, обладали еще

¹ См. стр. 201.

меньшей общностью и доказательностью, чем у Остроградского.

Многие сочинения Остроградского посвящены решению других задач математической физики: о намагничивании разобщенных брусков, о притяжении сфер и сфероидов, об интегрировании уравнений малых колебаний упругих сред и т. п.

С исследованиями по математической физике связана также большая группа работ Остроградского в различных областях механики. Н. Е. Жуковский, знаменитый русский математик и механик, делит эти исследования Остроградского на три части: относящиеся к анализу принципа виртуальных перемещений и вариационных принципов механики, к решению дифференциальных уравнений механики и посвященные частным задачам механики. В частности, среди обобщений принципа Лагранжа находятся: распространение этого метода на системы с освобождающимися связями, общий метод нахождения скоростей упругих точек при ударе о жесткую связь и др. Имеются и работы чисто прикладного характера по баллистике и артиллерийской технике.

В области математического анализа Остроградскому принадлежат большие открытия. По большей части эти открытия связаны с его прикладными работами и возникли как усовершенствования, необходимые для достаточно общей постановки задачи. Так, например, знаменитая формула Остроградского

$$\iiint_v \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_s P dy dz + Q dz dx + R dy dx$$

была выведена впервые в 1828 г. в «Заметке по теории теплоты». Ее обобщение на случай n -кратного интеграла было в 1834 г. найдено Остроградским для определения вариации кратного интеграла. В статьях по вариационному исчислению находится также важная формула дифференцирования кратного интеграла по параметру

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_L U dx dy dz \dots &= \int_L \frac{\partial U}{\partial \alpha} dx dy dz \dots - \\ &- \int_s U \frac{\partial L}{\partial \alpha} \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \dots}}, \end{aligned}$$

где параметр входит как в подынтегральную функцию U ,

так и в уравнения, определяющие границу S области интегрирования L .

В статье «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (1836, опубликовано в 1838 г.) дан метод, употребляющийся и в наше время.

Ряд статей Остроградского посвящен теории интегрирования алгебраических функций. Например, в них доказано, что алгебраический интеграл от рациональной функции может быть только рациональной функцией. Это вытекает (при $n=1$) из более общего результата, доказанного Остроградским: пусть дана рациональная функция $R(x, y)$, где

$$y = \sum_{k=0}^n A_k(x)y^k, \quad A_n = 1.$$

Если при этом $\int R(x, y) dx$ есть алгебраическая функция, то он является целой рациональной функцией от y степени $n-1$, коэффициенты которой — рациональные функции от x . Доказано также, что интеграл от алгебраической функции не может содержать ни показательных, ни тригонометрических функций. Найден способ отделения алгебраической части интеграла от рациональной дроби, без оснований называемый теперь в учебниках «правилом Эрмита».

Эти и многие другие результаты Остроградского в области теории интегрирования помимо их связи с прикладными задачами отразили новый этап развития интегрального исчисления. Мы уже указывали, что выделение класса функций, интегрируемых в элементарных функциях, в основном было завершено во времена Эйлера и в значительной части благодаря его усилиям. Новая проблематика состояла из более общих проблем относительно природы классов функций, получающихся при интегрировании того или иного класса функций: рациональных, алгебраических, элементарных, трансцендентных и т. д. Помимо Остроградского в этой области работали Абель, Лиувиль и др. Их результаты временами были близки, а иногда даже перекрывались. В последующем общая теория интегрирования была успешно продвинута П. Л. Чебышевым.

В плане обзора работ Остроградского по математическому анализу укажем еще на некоторые его результаты в области теории дифференциальных уравнений. В 1838 г. он опубликовал «Заметку о линейных дифференциальных уравнениях», где для уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

вывел определитель, называемый теперь детерминантом Вронского¹,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

($y_1, y_2, \dots, y_n$ — частные интегралы уравнения).

Ранее (1835) Остроградский внес улучшения в метод Ньютона приближенного решения системы дифференциальных уравнений.

В связи с задачей интегрирования рациональных дробей Остроградский нашел новый способ выделения кратных корней многочленов. Его «Лекции по алгебраическому и трансцендентному анализу» (1837) сыграли большую роль в развитии математического образования в России.

В сфере научных интересов Остроградского находилась и теория вероятностей, которой он посвятил шесть статей в разные времена своей жизни (от 1834 до 1859 г.). В них он исследовал вопросы теории страхования, азартных игр, статистического контроля качества продукции, производящие функции и другие актуальные для его времени вопросы теории вероятностей, подходя к ним с позиций практических приложений. Не избежал он в одной из своих работ и характерных для математиков того времени (в первую очередь Лапласа) заблуждений, состоящих в необоснованном приложении соображений теории вероятностей к решению вопросов судебной практики и других специальных проблем. Другой определенной его ошибкой было пренебрежительное отношение к работам Лобачевского. Эта ошибка замечательного математика учит, как недопустимы в науке проявления теоретической ограниченности, невнимательности или самомнения, как вредят они развитию науки. Их нельзя оправдать никакими, даже самыми большими, заслугами, ни теоретическими, ни практическими.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) также получил высшее математическое образование в Париже, где в 1825 г. ему была присуждена ученая степень доктора математики. Возвратился он в Россию в 1827 г. Долгие годы

¹ Вронский Г. (1775—1853) ввел этот детерминант в 1812 г.

был профессором университета и других высших учебных заведений Петербурга. Вскоре после приезда Буняковский был избран (1828) адъюнктом, а затем (1830) академиком. С 1864 г. и почти до самой смерти он являлся вице-президентом Академии наук.

В большом и разнородном научном наследии Буняковского (ему принадлежит около 130 работ) имеются важные научные результаты. В работах по теории чисел (их более 40) мы встречаем доказательства квадратичного закона взаимности, решение ряда задач диофантова анализа, учения о простых числах и т. д. Более 20 работ Буняковский посвятил теории вероятностей и ее приложениям. Им решены многие важные задачи, возникшие при организации страхового дела, ссудных касс, анализа народонаселения России (таблицы и эмпирическая формула смертности, подсчеты призывных контингентов и др.), промышленности. В качестве государственного эксперта по статистике и страхованию (с 1858 г.) Буняковский оказал большое содействие проникновению математических методов в практику хозяйственного строительства. Написанные им «Основания теории вероятностей» (1846) охватили все отделы теории вероятностей и ее приложений и явились первым большим руководством по этой науке в России.

В работах Буняковского по анализу решено большое число конкретных задач в части теории интегрирования, сходимости рядов и т. д. Ему, в частности, принадлежит (1859) честь открытия известного неравенства:

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x) dx,$$

которое иногда называют неравенством К. Шварца, хотя последний нашел и опубликовал его лишь через 16 лет после Буняковского. Геометрические исследования Буняковского в основном посвящены проблемам оснований геометрии. Он тщательно исследовал историю доказательств постулата о параллельных, тонко обнаружил несовершенства всех этих доказательств. Однако к работам Лобачевского Буняковский отнесся отрицательно, разделив ошибку Остроградского, и продолжал искать логически строгое доказательство постулата. Неевклидова геометрия представлялась ему логически немыслимой.

Работы Буняковского, как и подавляющего большинства математиков XIX в., оказались забытыми, влившись и

трансформировавшись в некоторый обобщенный опыт науки. Освоение и обобщение этого опыта для математиков нашего века является еще далеко не полностью решенной задачей. Но в то время (к середине XIX в.) деятельность Остроградского и Буняковского, их учеников, многие из которых стали крупными специалистами в различных областях математики и техники, определила новый подъем математики в России, особенно в Петербурге. Начал складываться коллектив творчески работающих математиков, ведущее место в котором к концу жизни Остроградского занял приехавший из Москвы П. Л. Чебышев.

Чебышев (по его собственному указанию, надо произносить: Чебышѡв) Пафнутий Львович (1821—1894) окончил в 1841 г. Московский университет. На конкурсе студенческих работ за сочинение на тему «Вычисление корней уравнений» он был награжден серебряной медалью. Будучи оставлен при университете, защитил в 1846 г. магистерскую диссертацию: «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В следующем году Чебышев переехал в Петербург и начал работать в университете. При этом университете он защитил в 1849 г. докторскую диссертацию «Теория сравнений» и работал в течение многих лет (1850—1882) профессором. Деятельность Чебышева в Академии наук началась в 1853 г., когда его избрали адъюнктом. Рост научного авторитета Чебышева был в дальнейшем отмечен избранием в число академиков (в 1856 г. — экстраординарным, в 1859 г. — ординарным).

В научном наследии Чебышева насчитывается более 80 работ. Оно оказало огромное влияние на развитие математики, и в особенности на формирование Петербургской математической школы. Для работ Чебышева характерна тесная связь с практикой, широкий охват научных проблем, строгость изложения, экономность математических средств в достижении крупных результатов.

Более конкретное изучение творчества Чебышева в настоящее время облегчается тем, что Академия наук издала полное собрание его сочинений. Помимо этого, в 1945 г. был выпущен в свет сборник «Научное наследие П. Л. Чебышева». Два тома этого сборника составлены из обзорных статей, в которых характеризуются труды Чебышева по математике (1-й том) и кинематике механизмов (2-й том).

Математические результаты Чебышева в основном распространяются на четыре области: теорию чисел, теорию



П. Л. Чебышев
1821—1894

вероятностей, теорию наилучшего приближения функций и общую теорию полиномов, теорию интегрирования.

Деятельность Чебышева в области теории чисел началась в 40-х годах прошлого века. Академик Буняковский привлек молодого ученого к комментированию и изданию сочинений Эйлера по теории чисел. Одновременно Чебышев готовил монографию по теории сравнений и ее приложениям в качестве докторской диссертации. К 1849 г. обе эти задачи были выполнены и соответствующие книги опубликованы.

Монография Чебышева была замечательной книгой и обладала большой долговечностью. Однако еще более примечательными были приложения к ней. В качестве приложения к «Теории сравнений» Чебышев опубликовал, в частности, мемуар: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины». Вскоре появилось еще несколько статей Чебышева на эту тему.

Проблема распределения простых чисел в ряду натуральных чисел — одна из самых старых в теории чисел. Она известна со времен древнегреческой науки. Первый шаг к ее решению сделал Евклид, доказав теорему, что в натуральном ряду имеется бесконечно много простых чисел. До тех пор, пока Эйлер не привлек средства математического анализа, ее решение практически не продвигалось. Эйлер сумел дать новое доказательство этой теоремы, исходя из определения дзета-функции:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

(n — натуральные, p — простые) и соображений, что сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ и $s \rightarrow 1$ неограниченно возрастает. Следовательно, произведение

$$\prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

имеет неограниченно большое число сомножителей. Лишь в 1837 г. Дирихле обобщил теорему Евклида, доказав, что в любой арифметической прогрессии $\{a + nb\}$, где a и b взаимно просты, содержится бесконечно много простых чисел. В 1798—1808 гг. Лежандр, изучив таблицы простых чисел

до 10^6 , вывел эмпирически, что число простых чисел в отрезке $[2, x]$ выражается формулой

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}.$$

Чебышев доказал, что формула Лежандра неверна, глубоко исследовал свойства функции $\pi(x)$ и показал, что истинный порядок роста этой функции тот же, что и функции $\frac{x}{\ln x}$. Более того, им были даны точные оценки

$$0,92129 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1,10555.$$

Это открытие Чебышева произвело огромное впечатление. Многие математики работали над усовершенствованием его методов и улучшением результатов. Сильвестр в статьях 1881 и 1892 г. сузил вышеупомянутое неравенство:

$$0,95695 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1,04423.$$

Дальнейшие приближения получили Шур (1929) и Брейш (1932).

Чебышев нашел также интегральные оценки $\pi(x)$. Ему удалось доказать, что с ростом x значение функции $\pi(x)$

колеблется около $\int_2^x \frac{dz}{\ln z}$, удовлетворяя бесконечно много

раз неравенствам

$$\pi(x) > \int_2^x \frac{dz}{\ln z} - \frac{\alpha x}{\ln^n x} \quad \text{и}$$

$$\pi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + \frac{\alpha x}{\ln^n x} \quad (\alpha > 0, \quad n \geq 1).$$

Только в 1896 г. Адамар и Валле-Пуссен доказали предельную теорему:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{dz}{\ln z}} = 1.$$

Уже в наши дни А. Сельберг нашел (1949) элементарное доказательство этого асимптотического закона. В 1955 г. А. Г. Постников и Н. П. Романов упростили громоздкий вывод Сельберга.

Исследование расположения простых чисел в натуральном ряде привело к появлению работ Чебышева о теории квадратичных форм. В 1866 г. появилась его статья «Об одном арифметическом вопросе», посвященная диофантовым приближениям, т. е. приближенному целочисленному решению диофантовых уравнений, что он проделал с помощью аппарата непрерывных дробей.

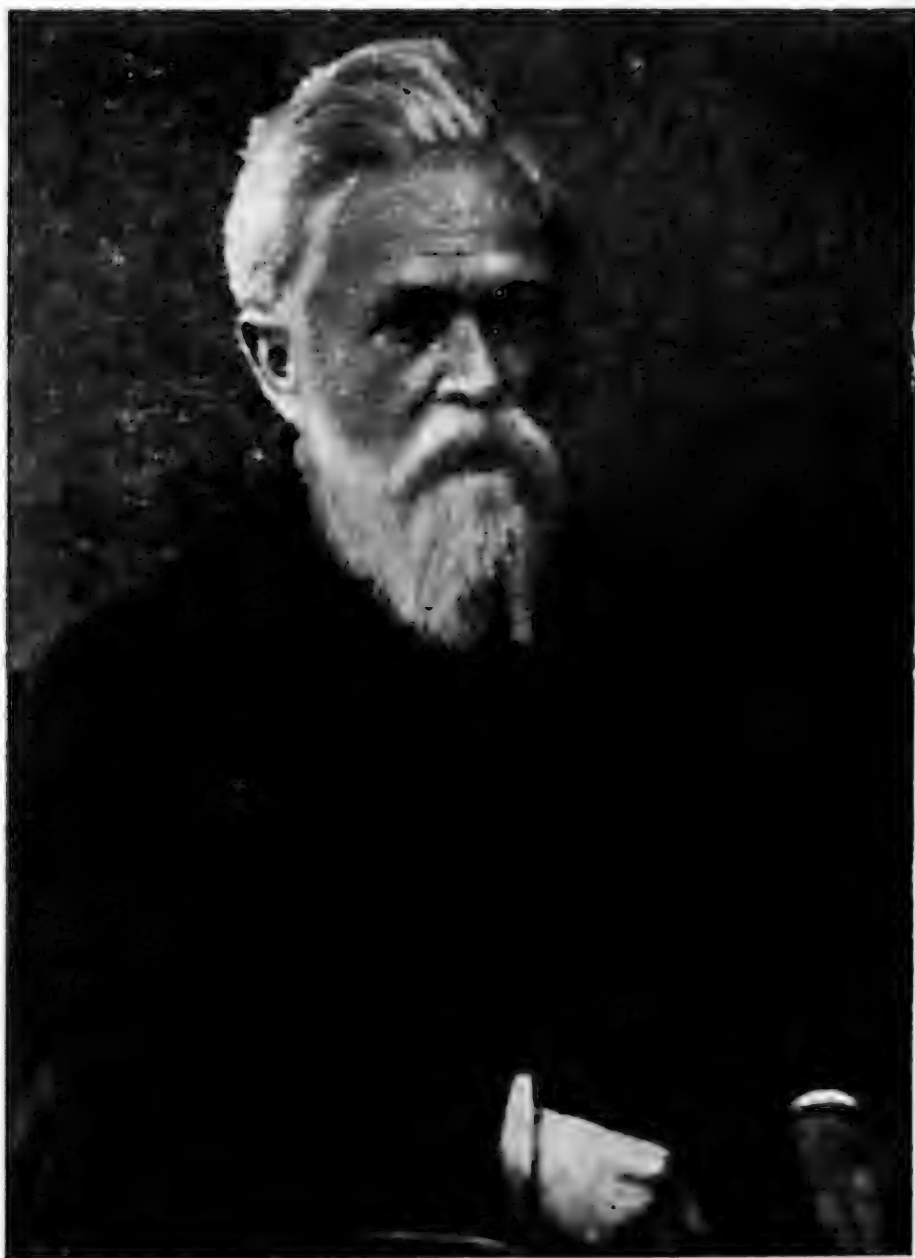
Идеи Чебышева в области теории чисел разрабатывали его ученики: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной и др.¹ Советскую школу теории чисел, весьма авторитетную и многочисленную, ныне возглавляет академик И. М. Виноградов. Кроме того, на посту директора Математического института АН СССР (с 1932 г.) И. М. Виноградов руководит самым крупным и значительным коллективом советских ученых-математиков.

К теории вероятностей Чебышев обратился еще в молодые годы, посвятив ей магистерскую диссертацию. В те времена теория вероятностей переживала своеобразный кризис. Ее основные закономерности: закон больших чисел и предельная теорема Муавра—Лапласа

$$G\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

[предельный закон вероятностей для отклонения числа x появлений случайного события от математического ожидания a этого числа x при n опытах с постоянной вероятностью p ; дисперсия $\sigma^2 = np(1-p)$] были в основном найдены еще в XVIII в. Осознание общезначимости этих законов привело к широкому их применению вплоть до попыток приложения их в области социальной практики людей. Это вызвало столь большое число необоснованных и ошибочных суждений, что

¹ См. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М., 1947.



А. А. Марков
1856—1922

это сказалось на научной репутации самой теории вероятностей. Без солидного обоснования понятий и результатов дальнейшее развитие этой науки было невозможно.

Чебышев написал по теории вероятностей всего четыре работы (в 1845, 1846, 1867 и 1887 гг.), но, по всеобщему признанию, эти работы вывели теорию вероятностей снова в ранг математических наук, послужили основой для создания целой математической школы.

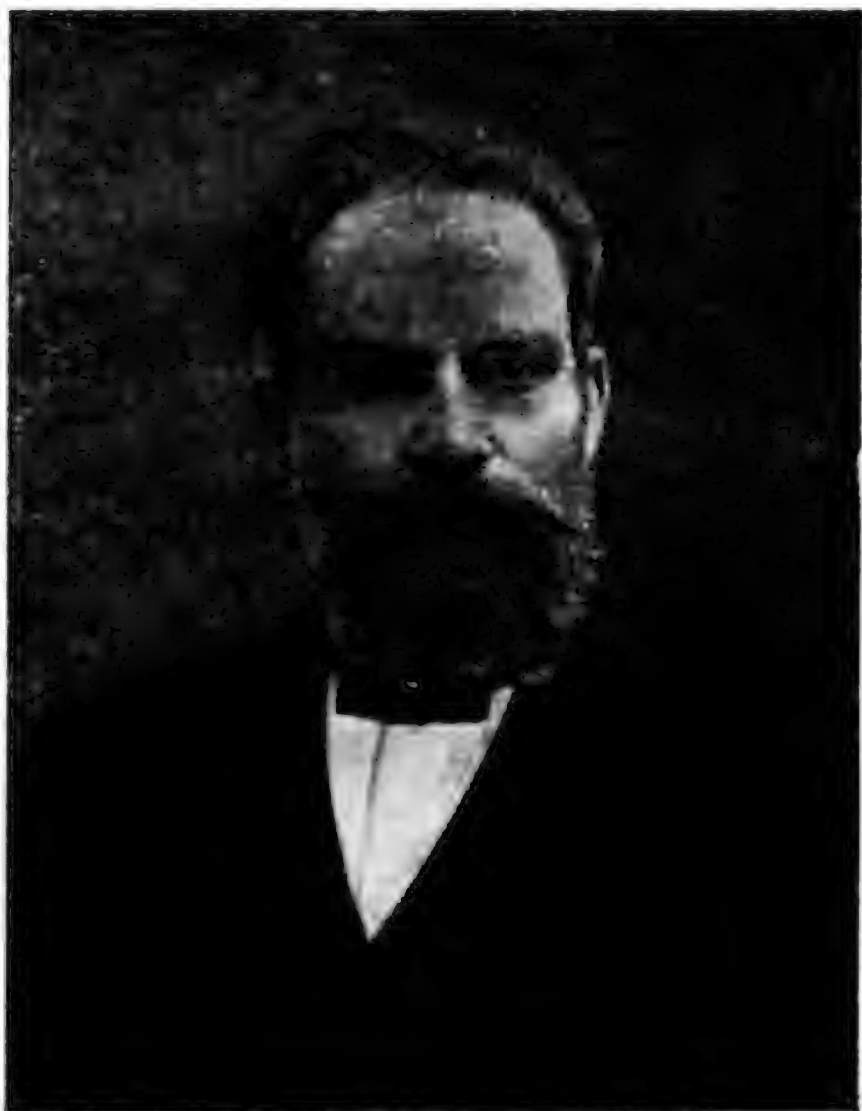
Исходные позиции автора проявились уже в его магистерской диссертации, где он ставил перед собой цель — дать такое построение теории вероятностей, которое в наименьшей степени привлекало бы аппарат математического анализа. Этого он достигал, отказываясь от перехода к пределу и заменяя этот переход системой неравенств, в которые заключены все соотношения. Числовые оценки погрешностей и отклонений остались характерной чертой и для последующих работ Чебышева по теории вероятностей.

В дальнейшем Чебышев расширил аппарат теории вероятностей. Для этого он привлек алгебраические непрерывные дроби, свойства которых он вначале изучил в связи с задачами об интегрировании алгебраических функций. На базе алгоритма непрерывных дробей он построил общую теорию разложения произвольной функции в ряд по ортогональным полиномам. Дополнив аппарат строгим определением свойств математических ожиданий и других определений и рассуждений, Чебышев в 1866 г. нашел доказательство закона больших чисел в самой в то время общей классической формулировке: если математические ожидания величин $x, y, z, \dots$, $x^2, y^2, z^2, \dots$ будут соответственно $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$, то вероятность, что среднее арифметическое N величин $x, y, z, \dots$ от среднего арифметического математических ожиданий этих величин разнится не более как на

$$\frac{1}{t} \sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}},$$

при всяком t , будет превосходить $1 - \frac{t^2}{N}$.

Достаточно общее и строгое доказательство центральной предельной теоремы Чебышеву удалось найти лишь к 1887 г. Для того чтобы доказать, что «если математические ожидания величин $u_1, u_2, u_3, \dots$ равны нулю, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо конечного предела, вероятность того, что сум-



А. М. Ляпунов
1857—1918

ма n величин $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, деленная на квадратный корень из удвоенной суммы математических ожиданий их квадратов, заключается между двумя какими-нибудь величинами t и t' , с возрастанием числа n до ∞ имеет пределом величину интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t_1} e^{-x^2} dx \gg$$

Чебышеву пришлось найти метод, известный в современной литературе как метод моментов.

В доказательстве последней теоремы Чебышев допустил логический пробел. Оказалось, что помимо условия независимости случайных величин нужно предположить, что среднее арифметическое дисперсий при $n \rightarrow \infty$ стремится к некоторому положительному пределу. Этот недостаток был исправлен его учеником А. А. Марковым.

Ученики Чебышева — Марков и Ляпунов — развили своими работами его направление в теории вероятностей до такой степени, что, по словам А. Н. Колмогорова, теперь эти работы всюду воспринимаются как исходный пункт всего дальнейшего современного развития теории вероятностей. В их трудах получили развитие метод моментов (Марков) и метод характеристических функций (Ляпунов). Среди достижений Петербургской школы теории вероятностей особенно заслуживает быть отмеченной теория цепей Маркова. Работы Чебышева, Маркова и Ляпунова составляют, по классификации А. Н. Колмогорова, целый этап в истории теории вероятностей. Этот этап охватывает вторую половину XIX в. В течение этого периода теория вероятностей в Западной Европе столь активной разработке не подвергалась. Следующий этап — современный — открывается работами С. Н. Бернштейна и Р. Мизеса. Удельный вес советской школы теории вероятностей, руководимой А. Н. Колмогоровым, исключительно велик. Она занимает ведущее место в мировой науке.

Значительная группа работ Чебышева посвящена теории приближения функций. Эта группа работ примечательна как своим непосредственным происхождением из практики, так и огромным теоретическим последствием, приведшим к возникновению современной конструктивной теории функций. Последняя изучает, как известно, зависимости между свойствами различных классов функций и харак-

тером их приближения другими, более простыми, функциями в конечной или бесконечной области.

Во время заграничной научной командировки 1852 г. Чебышев заинтересовался различными видами шарнирных механизмов, с помощью которых осуществляется преобразование прямолинейного поступательного движения поршня паровой машины в круговое движение маховика. Одной из разновидностей подобных механизмов является широко известный параллелограмм Уатта. Чебышев вообще построил большое количество механизмов и посвятил им много исследований. Возьмем, например, механизм, где вокруг O и O_1 могут вращаться OA и O_1A_1 . Движение точки M , передающей толчки поршня на вращающиеся части, не будет прямолинейным. Оно будет носить характер биений. Задача рассчитать механизм так, чтобы отклонения точки M от вер-

тикали были минимальными (чтобы избежать вредного влияния на работу машины), приводит к математической задаче: определить движение точки M функцией, наименее отклоняющейся от нуля на данном промежутке.

Наиболее удобной для оперирования функцией является полином. Отсюда вытекают задачи определения полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, а также аппроксимирования функций полиномами. Последняя задача, по Чебышеву, ставится так: на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция. Рассматривается для этого же отрезка множество всех полиномов $P_n(x)$ степени не выше N . Рассматриваются

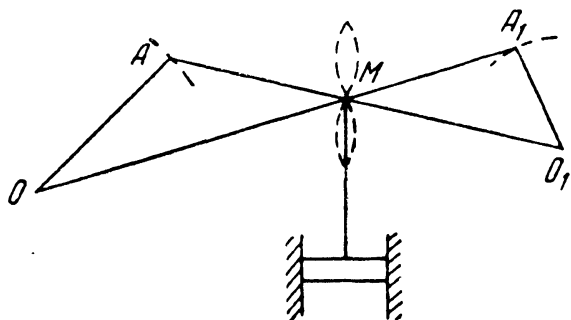


Рис. 22

$$\max |f(x) - P_n(x)|$$

для всех данных полиномов, и из них выбирается тот, который дает наименьшее значение данного выражения.

Чебышев исследовал свойства и нашел вид целого класса специальных полиномов, носящих его имя и в наши дни. Полиномы Чебышева, Чебышева—Лагерра, Чебышева—Эрмита и их разновидности играют большую роль в математике, имея многообразные приложения. Не говоря о кинематике механизмов, послужившей исходным пунктом чебы-

шевской теории наилучшего приближения, последняя предлагается к решению алгебраических уравнений, интерполяции, приближенным квадратурам, геодезическим и картографическим задачам и т. д.

В теории Чебышева наилучшего приближения функций содержатся идеи общей теории ортогональных многочленов, теории моментов и методов квадратур. Ортогональные многочлены с весом получаются у него при разложении интеграла

$$\int_a^b \frac{P(x)}{z-x} dx \quad (p(x) \geq 0)$$

в ряд вида

$$\frac{S_0}{z} + \frac{S_1}{z^2} + \frac{S_2}{z^3} + \dots,$$

а затем в соответствующую этому ряду непрерывную дробь

$$\frac{b_0}{z-a_1} + \frac{b_1}{z-a_2} + \frac{b_2}{z-a_3} + \dots$$

Если составить последовательность подходящих дробей

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)},$$

то знаменатели образуют систему многочленов, ортогональных на (a, b) с весом $p(x) \geq 0$.

Ортогональные многочлены Чебышев связал со способом наименьших квадратов. Он нашел, что многочлен $P_n(x)$, обращающийся в минимум

$$\int_a^b p(x) [f(x) - P_n(x)]^2 dx,$$

может быть представлен в виде суммы

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k P_k(x),$$

где $P_k(x)$ — указанные выше ортогональные многочлены, а коэффициенты

$$A_k = \frac{\int_a^b f(x) P_k(x) p(x) dx}{\int_a^b p_k^2(x) P(x) dx}.$$

Ряд статей Чебышева посвящен теории интегрирования. В них речь идет об интегрировании алгебраических иррациональностей и методах приближенного вычисления определенных интегралов. Здесь ему принадлежит окончательное решение вопроса об условиях интегрируемости дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

(m, n, p — рациональные числа) в элементарных функциях. Именно, он установил, что найденные еще в XVIII в. случаи интегрируемости: p — целое число; $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ —

целые числа, являются единственно возможными. Настоящий цикл работ Чебышева связан с работами его старшего товарища И. И. Сомова. И в этой области, как и во всех предыдущих, идеи Чебышева разрабатывали его ученики и другие ученые: Е. И. Золотарев, И. П. Долбня, И. Л. Пташицкий, Д. А. Граве и др.

Научной деятельности Чебышева мы уделили сравнительно много места потому, что она является основой, началом быстрого развития математики во второй половине XIX в. в Петербурге. Чебышев и его ученики: А. А. Марков, А. М. Ляпунов, Е. И. Золотарев, А. Н. Коркин, Г. Ф. Вороной и др. образовали ядро научного коллектива математиков, за которым в литературе упрочилось название Петербургской математической школы. Коллектив этот приобрел в 1890 г. организационную форму в виде Петербургского математического общества, функционировавшего до 1905 г.

Петербургские математики оказали решающее влияние на формирование научных школ в других городах. Так, А. М. Ляпунов, проработавший ряд лет (1885—1902) в Харькове, во многом способствовал развертыванию научной деятельности и объединению математиков. Уезжая в Петербург, он оставил своего ученика В. А. Стеклова на посту председателя Харьковского математического общества. Д. А. Гра-

ве, переехав в 1902 г. из Петербурга в Киев, создал там через несколько лет научную алгебраическую школу, откуда вышли О. Ю. Шмидт, Н. Г. Чеботарев и др.

Научные интересы петербургских математиков, да и самого Чебышева, в частности, не ограничивались теорией чисел, теорией вероятностей и отдельными проблемами математического анализа (теория интегрирования, теория приближения функций). Из других областей математики наиболее интенсивно разрабатывались дифференциальные уравнения (Ляпунов, Имшенецкий, Сонин и др.) и теория функций комплексного переменного (Сохоцкий). Об основных направлениях подобных исследований мы уже упоминали в главах IX и X.

Петербургская математическая школа в конце прошлого века и в начале нынешнего превратилась в совокупность нескольких математических научных школ, оказавших большое влияние на развитие математики в России. Связи ленинградских (петербургских) математиков с другими научными школами России после Великой Октябрьской социалистической революции настолько укрепились, а научные интересы настолько переплелись, что сам термин «Петербургская школа» потерял свой обособляющий смысл.

Математическое творчество С. В. Ковалевской. Прежде чем перейти к характеристике других математических коллективов, осветим научную деятельность первой в мире женщины — профессора математики, составившей славу русской науки, но оставшейся трагически одинокой, — Софьи Васильевны Ковалевской (1850—1891).

С. В. Ковалевская выросла в семье богатого генерала, сделавшегося после отставки помещиком. Образование она получила домашнее, но ее учили хорошие педагоги. Рано обозначился у нее интерес к математике. Так как доступ в университеты в России для женщин был закрыт, она последовала примеру передовых женщин того времени и уехала для получения образования за границу. Получить заграничный паспорт ей помог брак с В. О. Ковалевским, ставшим широко известным впоследствии своими работами по палеонтологии. Любовь к науке, и прежде всего к математике, прогрессивное мировоззрение, созвучное умонастроению передовых мыслителей и борцов с самодержавием, помогли С. В. Ковалевской преодолеть условности и предубеждения родных и вообще людей ее круга.

С. В. Ковалевская уехала в Германию в 1869 г. После кратковременного пребывания в Гейдельберге, где работали в то



С. В. Ковалевская
1850—1891

время Кенигсбергер, Дюбуа-Реймон, Кирхгоф, Гельмгольц, она прибыла в Берлин и убедила К. Вейерштрасса руководить ее математическими занятиями. Талант Софьи Васильевны развернулся под умелым руководством, и уже в 1874 г. ее учитель направил в университет в Геттинген три работы: «К теории уравнений в частных производных», «О форме кольца Сатурна» и «О приведении одного класса абелевых интегралов третьего ранга к интегралам эллиптическим». Этих работ с избытком хватило для присуждения ей степени доктора философии без защиты диссертации.

В первом из сочинений Ковалевская доказала существование единственного аналитического решения задачи Коши для дифференциального уравнения с частными производными вида

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = f \left(x, x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi, \dots, \frac{\partial^{\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_r}} \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \leq N, \alpha < n \right)$$

при условиях: а) аналитичности функции f в окрестности $(x_0, a_1, \dots, a_r)$ и функций, входящих в начальные условия;

б) уравнение имеет нормальную форму, т. е. $\alpha + \sum_{i=1}^r \alpha_i \leq n$.

Здесь же она нашла, независимо от Коши, линейное преобразование аргументов, приводящее уравнение к нормальной форме. Значительным открытием Ковалевской в этой области явился пример уравнения типа теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

с начальными условиями $x=a, \varphi=\varphi_0(y/b)^1$.

Для этого уравнения задача Коши вообще не имеет голоморфного решения, так как степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{2k} \varphi_0(y/b)}{dy^{2k}} \cdot \frac{(x-a)^k}{k!},$$

¹ Этот символ означает аналитичность функции в окрестности $y=b$

формально удовлетворяющий условиям задачи, сходится лишь при весьма специальных условиях относительно

$$\Phi_0(y/b).$$

Эти результаты Ковалевская распространила на нормальные системы дифференциальных уравнений с частными производными, придав им вид, близкий к тому, который мы встречаем в современных учебниках.

Во второй работе Ковалевская нашла более высокую степень приближения по сравнению с решением Лапласа, что позволило ей утверждать, что кольца Сатурна в сечении имеют не эллиптическую (по Лапласу), а яйцевидную форму. Позднее была установлена несплошность структуры этих колец.

Наконец, в третьей статье ею были найдены условия приведения ультраэллиптического интеграла, содержащего полином восьмой степени, к эллиптическому интегралу первого рода.

В том же, 1874, году Ковалевская вернулась в Россию. Она выступила с научными докладами, познакомилась с Чебышевым, Марковым, Жуковским, Бугаевым и другими учеными-математиками, вела литературную деятельность. Однако, несмотря на значительный научный авторитет и содействие ученых, для Ковалевской оказалось невозможным ни получить работу в университете, ни даже сдать магистерские экзамены (степени, полученные за границей, не принимались в расчет в русских университетах). Царское правительство ни под каким видом не допускало женщин в высшую школу.

Только в 1883 г., после смерти В. О. Ковалевского, она получила приглашение на должность доцента во вновь открытый университет в Стокгольме и переехала в Швецию, где через год (в 1884 г.) стала профессором. Здесь перед ней открылись возможности для научной работы. Год за годом она читала курсы лекций. Их высокий научный уровень и педагогическое мастерство лектора вызвали благожелательные отклики. Известно, что С. В. Ковалевская читала следующие курсы лекций: теория дифференциальных уравнений с частными производными (1884, 1890), вейерштрассова теория алгебраических (1885), абелевых (1885—1887), эллиптических (1888) и тета-функций (1888), теория потенциала (1886), теория движений твердого тела (1886—1887), качественная теория дифференциальных уравнений по Пуанкаре (1887—1888), аналитические методы теории чисел (1890) и др.

Энергичная научная деятельность Ковалевской принесла тем временем новые плоды. В 1888 г. она получила премию Парижской академии наук за лучшее в объявленном конкурсе решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, где рассмотрен случай нагруженного (не вполне симметрического) гироскопа. За другую работу в этой области ей была присуждена премия Шведской академией наук.

Существо дела здесь состоит в том, что уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки в общем случае не имеют однозначных решений с пятью произвольными постоянными и на всей комплексной плоскости в качестве особых точек содержат только полюса. Установив это, Ковалевская нашла затем, что в некоторых случаях все элементы движения могут выражаться через эллиптические функции от времени t . Эти функции, как известно, на комплексной плоскости имеют в качестве особых точек только полюса и, следовательно, однозначны.

Первый из таких случаев, когда центр движения находится в неподвижной точке, был исследован Эйлером и Пуансо. Они доказали, что для того, чтобы полностью определить движение, достаточно интегралов живых сил и площадей.

Второй случай выделил и разрешил Лагранж. Это случай, когда эллипсоид инерции относительно неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а неподвижная точка лежит на оси вращения этого эллипсоида. Лагранж прибавил к интегралу живых сил и к интегралу площадей относительно вертикали, проходящей через точку опоры, третий интеграл, выражающий постоянство условий скорости относительно оси вращения эллипсоида инерции. Это дало ему возможность выразить все элементы движения через посредство эллиптических трансцендентностей.

Третий случай разрешила Ковалевская. Это тот случай, когда центр тяжести тела лежит на плоскости экватора эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки, служащего эллипсоидом вращения и удовлетворяющего условию $A = B = 2C$ (A, B, C — главные моменты инерции).

Н. Е. Жуковский следующим образом наглядно интерпретировал эти три случая (см. рис. 23).

Через три года после смерти С. В. Ковалевской, в 1894 г., А. М. Ляпунов придал этим ее результатам весьма общую форму. Однако эта проблема в общем виде еще не разрешена. Общих методов изучения соответствующих уравнений для любых параметров и начальных данных еще нет.

Крупнейшие русские математики — Чебышев, Буняковский и Имшенецкий — добились в 1889 г. избрания С. В. Ковалевской членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Однако даже члену-корреспонденту Академии, имеющему прославленное научное имя, работы в Академии или университетах царское правительство не разрешало вести; для женщин это было запрещено. Умерла С. В. Ковалевская в 1891 г. в расцвете творческих сил и замыслов; похоронена в Стокгольме, на Северном кладбище.

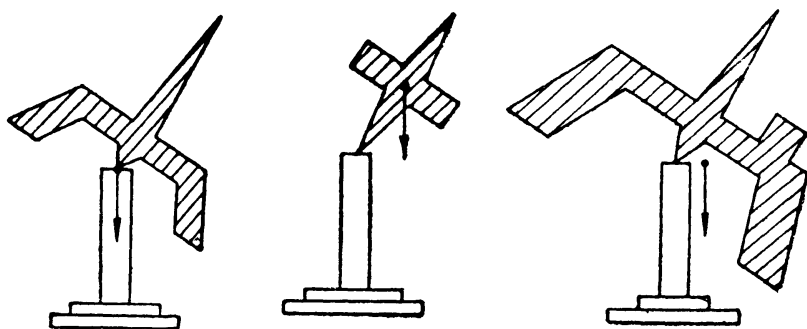


Рис. 23

Московская математическая школа. В заключение рассмотрим основные этапы формирования Московской математической школы. В отличие от Петербургской школы, где средоточием математических исследований являлась Академия наук, математики Москвы группировались вокруг университета. Историю математики в XIX в. в Москве следовало бы начать с 1804 г., с момента организации физико-математического факультета и кафедр чистой и прикладной математики. Однако первая половина века характеризуется в основном постепенным повышением уровня преподавания, ростом квалификации профессоров и преподавателей. В трудных условиях самодержавного гнета медленно росло и количество студентов: за 11 лет (1825—1836) физико-математический факультет окончило 119 человек, т. е. в среднем около 11 человек в год; за следующие 18 лет (1837—1854) его окончило уже 453 человека, что составляет около 25 человек в год. Возможности применения научных талантов были весьма ограниченными. Тем не менее из выпускников Московского университета за полстолетия вышло немало выдающихся ученых: академики П. Л. Чебышев, И. И. Сомов, Ф. А. Бредихин, профессора В. Я. Цингер, А. Ю. Давидов, М. Ф. Хандриков, Н. А. Любимов, А. Г. Столетов и др.

В 1811 г. в Москве была предпринята попытка создать первое в России математическое общество. Инициатором был подполковник Н. Н. Муравьев. Целью общества, как было указано в его уставе, было распространение математических наук. Впрочем, практически дело свелось к обучению прикладным военным наукам. Через пять лет, в 1816 г., на базе общества выросло военно-учебное заведение, готовящее офицеров генерального штаба. В 1826 г. оно было переведено в Петербург.

Перелом в налаживании серьезной научной деятельности в Москве наметился лишь в 60-е годы XIX в. Он целиком связан с организацией Московского математического общества. Математические общества, как и всякие другие научные общества, являются формой коллективного труда ученых, важнейшей составной частью которого является научная взаимная информация и обсуждения. Появление научных обществ знаменует новый, более высокий уровень научного исследования. В наши дни помимо обществ существует много организационных форм коллективного труда ученых (лаборатории, семинары, институты, координационные центры и т. п.), но роль научных обществ не снижается. Можно думать, что в грядущем коммунистическом обществе общественные формы научных объединений займут еще большее место.

Московское математическое общество начало свою деятельность в 1864 г. Вначале это была небольшая группа ученых, преимущественно преподавателей университета, собиравшихся на квартире у всеми уважаемого учителя многих из них, престарелого профессора Н. Д. Брашмана (1796—1866), ушедшего в этом же, 1864, году в отставку.

На первом заседании, 15 сентября 1864 г., Н. Д. Брашман был избран президентом общества, А. Ю. Давидов — вице-президентом. Было решено, что целью нового общества будет взаимное содействие в занятиях математическими науками. Для этого все 13 членов общества поделили между собой отрасли физико-математических наук, чтобы следить за их успехами и развитием и сообщать о них на заседаниях. По математике эти реферативные задания распределились таким образом (формулировки сохранены): А. Ю. Давидов — интегрирование уравнений с частными дифференциалами; А. В. Летников — дифференциальные уравнения; Н. Н. Алексеев — интегрирование иррациональных функций и эллиптические функции; К. М. Петерсон — аналитическая геометрия; С. С. Урусов — теория конечных разностей; Ф. А. Слуд-



Н. Д. Брашман
1796—1866

ский, а затем с 1865 г. Н. В. Бугаев — теория чисел. Другие члены общества взяли на себя рефераты по механике, астрономии и физике.

Через год, в октябре 1865 г., члены общества возбудили ходатайство об официальном утверждении своей организации. До того, в апреле 1865 г., они решили издавать «Математический сборник»; первый выпуск этого журнала появился в октябре 1866 г. Официальное оформление общества произошло 28 января 1867 г. Большие финансовые и организационные трудности испытывало общество, но дело шло. К 1901 г. в нем состояло уже 101, а к 1913 — 112 человек. С перебоями, но выходил и «Математический сборник» — старейший русский специально математический журнал, существующий и в наши дни. Наладился в 1873 г. обмен изданиями с заграничными организациями. Научный авторитет общества и связи его членов крепили. Большую помощь обществу оказывал его влиятельный член — П. Л. Чебышев.

Постепенно в обществе произошла дифференциация, приведшая к преобладанию математики и механики (носившей в то время название прикладной математики) и практически к их обособлению от других наук. До 1917 г. из 971 научного сообщения, прочитанного на заседаниях общества, 640 (66%) пришлось на математику, 217 (22%) — на механику и 114 (12%) на физику и астрономию.

Научные интересы московских математиков охватывали многочисленные области. Однако вскоре выкристаллизовались наиболее продуктивные направления, складывающиеся в научные школы. Во второй половине XIX в. таких школ можно было насчитать две: прикладной математики (механики) и дифференциальной геометрии. Было также сильным направление дифференциальных уравнений.

Инициатор организации математического общества и его первый руководитель Н. Д. Брашман окончил в Вене Политехнический институт и университет. После работы в Петербурге и в Казани (1825—1834) он прибыл в Московский университет как профессор прикладной математики. За 30 лет работы в университете он заложил научные основы преподавания теоретической и практической механики. Читал он лекции и по математическим дисциплинам. Его научные интересы относились к исследованию принципа наименьшего действия и к гидромеханике. Он был учителем многих выдающихся математиков (П. Л. Чебышев, И. И. Сомо́в и др.) и механиков (А. С. Ершов, А. Ю. Давидов, Ф. А. Слудский и др.).

Преемник Брашмана по преподаванию механики в университете и на посту президента Московского математического общества А. Ю. Давидов (1823—1885) был ученым широких научных взглядов, счастливо сочетая теоретические и прикладные занятия. Его работы по механике относятся к двум проблемам: теории равновесия тел, погруженных в жидкость, и капиллярным явлениям. Ему принадлежит метод нахождения положений равновесия плавающих тел с помощью поверхности центров (поверхности, на которой размещены все центры тяжести для различных сечений тела постоянного отсеченного объема). Теорию капиллярных явлений Давидов стремился связать с общей теорией равновесия жидкостей и изучать ее средствами аналитической механики с помощью принципа виртуальных перемещений, но с учетом изменения плотности на границах. Математические исследования Давидова относятся к применениям теории вероятностей, дифференциальным уравнениям с частными производными, теории интегрирования.

В конце XIX в. в университете и высшем техническом училище работало сравнительно много математиков прикладного направления: Ф. А. Слудский, Д. Н. Лебедев, Ф. Е. Орлов, В. Л. Цингер. Общеизвестным главой этого научного направления сделался Николай Егорович Жуковский (1847—1921). Он окончил университет в 1868 г. по прикладной математике. Многие годы Жуковский преподавал в университете и в высшем техническом училище. Вступив в математическое общество (1876), он сделался одним из самых активных и авторитетных членов; его избрали вице-президентом (1903—1905), а затем президентом (1905—1921) общества.

В сочинениях и во всей деятельности Жуковского нашло наиболее яркое выражение сочетание ученого — теоретика и инженера-практика. В математике его основные исследования концентрируются вокруг уравнений математической физики, причем почетное место отведено приближенным методам решения. Много работал он над проблемами теории функций комплексного переменного, открыв применения этой теории к решению сложных проблем гидро- и аэромеханики.

Среди многочисленных работ (около 80) Н. Е. Жуковского, написанных до 1900 г., преобладают работы по гидродинамике. В них исследуются проблемы качки судов, реактивные водометные двигатели, трение жидкости в полости тела и т. п. В связи с техническим консультированием московского водопровода Жуковский открыл явление гидравлического удара и разработал его теорию. Кроме того, ему при-

надлежит большое количество исследований по механике: теории движения твердого тела вокруг неподвижной точки, устойчивости движения и т. д.

В последние годы XIX в. Жуковский сосредоточил усилия на разработке проблем аэромеханики и авиации. С 1889 г. появляются его исследования по теории воздухоплавания. Вскоре он перешел к экспериментам в этой области, построив в Московском университете (1902) первую аэродинамическую трубу. Через два года, в 1904 г., он открыл метод присоединенных вихрей, сделав его основой аэродинамических расчетов. За этим последовала разработка теории подъемной силы крыла и вихревая теория винта. Одновременно расширялись и эксперименты. Вместе с учениками и сотрудниками (число которых быстро росло) Н. Е. Жуковский в 1904 г. принимал участие в проектировании и строительстве первого в России аэродинамического института в Кучино (под Москвой). В 1910 г. он организовал аэродинамическую лабораторию в Московском высшем техническом училище. Неисчислимы научно-теоретические и экспериментальные заслуги Жуковского дали основание В. И. Ленину назвать его «отцом русской авиации».

Жуковский воспитал огромное количество ученых-теоретиков, экспериментаторов, инженеров, офицеров-летчиков. Он был окружен вниманием и заботой Советского правительства. После его смерти в 1921 г. его исследования были продолжены и развиты его учениками, в особенности С. А. Чаплыгиным. Из прикладной математики развились многочисленные отрасли механики — науки многообразной, тесно сочетающей математические методы теоретического исследования с экспериментом и потому особенно важной для современных отраслей новой техники. Советская механика вносит ныне достойный вклад в строительство научно-технической базы коммунизма и насчитывает многочисленных выдающихся представителей (М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев и др.).

Другая научная школа, о которой мы выше упоминали, ведет свое начало от работ К. М. Петерсона по классической дифференциальной геометрии. Петерсон окончил в 1852 г. университет в Тарту. Его учителями были Зенф и Миндинг, которые привили ему, по-видимому, интерес к проблемам дифференциальной геометрии. В кандидатской диссертации «Об изгибании поверхностей» (1853) и в последующих работах Петерсон по существу определил развитие теории поверхностей на долгие годы. Он исследовал изгибания поверхностей, ввел изгибание на главном основании, решал связан-



Н. Е. Жуковский
1847—1921

ную с изгибанием задачу определения поверхности по заданным квадратичным формам, выведя аналитические условия, определяющие поверхность с точностью до положения в пространстве. Эти условия известны как формулы Майнарди-Кодацци, хотя последние получили свои результаты на четыре и пятнадцать лет соответственно позже Петерсона. Кроме того, он нашел изгибания минимальных поверхностей, открыл новые классы поверхностей. К слову отметим, что Петерсон всю жизнь работал преподавателем средней школы, а степень доктора получил в Одесском университете (1879) не за отмеченные работы, а за не столь значительные работы по теории дифференциальных уравнений.

Теория поверхностей и их изгибаний надолго сделалась объектом исследования московских геометров. Вслед за Петерсоном этими проблемами занимался Б. К. Млодзеевский, посвятивший им свою магистерскую диссертацию. Здесь он вывел общее уравнение изгибания (уравнение в частных производных 2-го порядка, выражающее координаты точек поверхности с данным линейным элементом ds^2 в функции величин u, v). Он получил результаты в теории дифференциальных инвариантов поверхностей и многомерных многообразий, а также относительно частных классов поверхностей. Д. Ф. Егоров исследовал трижды ортогональные системы и ввел так называемые потенциальные поверхности (вошедшие в мировую литературу по инициативе Дарбу как поверхности E). Эти работы были впоследствии продолжены его учениками: Л. Н. Сретенским и С. П. Финиковым. Московскую школу дифференциальной геометрии после Егорова возглавляли С. П. Фиников и С. С. Бюшгенс. В настоящее время эта школа представляет активный творческий коллектив, возглавляемый С. П. Финиковым.

Жуковский, Егоров и Млодзеевский в наиболее яркой форме отразили и в значительной мере определили стиль работы математиков Москвы конца XIX—начала XX в. Этот стиль характеризовался широтой научных интересов, отсутствием узкой специализации, стремлением к исследованию обобщающих идей. Вначале Жуковский, а затем Егоров и Млодзеевский ввели в практику преподавания научные семинары и лекции, посвященные новым областям математики. Это ускорило процесс роста молодых ученых. В семинарах университета выросли Н. Н. Лузин, В. В. Голубев, И. И. Привалов, В. В. Степанов, а затем П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Д. Е. Меньшов, Л. Н. Сретенский, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин и др., составившие основу Мос-



К. М. Петерсон
1818—1881

ковской математической школы после Великой Октябрьской социалистической революции и завоевавшие ей своими работами ведущее положение в науке.

Тематически объединение научных интересов значительной части московских математиков (если не сказать, большинства) произошло в начале XX в. вокруг проблем теории множеств и теории функций. Внимание было обращено на исследование основных понятий анализа (функции, производной, интеграла и т. д.) и операций (например, разложение функций в ряды) с более общих точек зрения. Характерным моментом многих исследований сделалось стремление к полному выяснению действительного смыслового объема общих понятий и к их обобщению, когда с их помощью не удастся получить исчерпывающий ответ на поставленный вопрос. При этом наметилось много общих черт с творчеством выдающихся французских математиков (Борель, Лебег, Бер и др.), с которыми Егоров и Млодзеевский познакомились во время научных командировок во Францию.

Начало бурному развитию этого нового направления в Москве положили диссертация И. И. Жегалкина о трансфинитных числах и работа Егорова «О последовательностях измеримых функций» (1911). Основным результатом последней явилась теорема: всякая сходящаяся почти всюду последовательность измеримых функций¹ сходится равномерно на замкнутом множестве, дополнение к которому имеет сколь угодно малую меру. Теорема эта сразу же подчеркнула значение исследований по теории функций для всего математического анализа, позволив продвинуть те вопросы, где трудность состоит в исследовании характера непрерывности и сходимости.

Через год, в 1912 г., ученик Д. Ф. Егорова Н. Н. Лузин установил еще более тесную связь структурных свойств измеримых функций с более узким классом непрерывных функций, открыв замечательное *C*-свойство: всякую измеримую функцию, конечную почти всюду на некотором отрезке, можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы она стала непрерывной на всем отрезке. Название этого свойства выбрано по начальной букве французского слова: *continuité*, что означает непрерывность.

Открытие *C*-свойства создало сразу же широкие разносторонние возможности, раскрытые и в значительной степени

¹ Измеримые функции — функции, у которых для любого действительного M множество значений x , для которых $f(x) < M$, будет измеримо.



Д. Ф. Егоров
1869—1931

реализованные в книге Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), представленной им в Московский университет в качестве магистерской диссертации. Значение этой книги, определившей на многие годы вперед линии развития метрической теории функций (т. е. части теории функций, основывающей свои выводы на понятии меры множества), было оценено тотчас по ее появлению присуждением ее автору ученой степени доктора, минуя степень магистра. Поэтому мы уделим некоторое место ее характеристике.

Выяснение взаимосвязей новой теории функций с математическим анализом было главной целью этой книги. Более конкретная постановка задачи состоит в совместном изучении структурных свойств определенных классов функций и аналитического аппарата, изображающего этот класс функций и операции над ним. При этом возможны две взаимно обратные постановки задачи: а) исходя из структурного свойства функции, определить аналитический аппарат, ее изображающий; б) исходя из класса аналитических выражений, отыскать структурное свойство соответствующих функций.

В первой из шести глав книги Лузина дан общий обзор свойств измеримых множеств и измеримых функций и вывод С-свойства. Вторая глава посвящена отысканию примитивной функции. Примитивная, по Лузину, — это непрерывная функция, имеющая данную функцию своей производной почти всюду (последнее обусловлено необходимостью охватить обобщения понятия интеграла, введенные Лебегом и Данжуа). Оказалось, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, имеет примитивную. Лузин искал тут же примеры применения теоремы о существовании примитивной. Он рассмотрел задачу Дирихле для круга. Для произвольной измеримой функции, конечной почти всюду на окружности, он доказал существование гармонической функции, голоморфной внутри круга и принимающей значения этой функции почти всюду на окрестности. Это обстоятельство открыло дорогу для исследований в дальнейшем граничных свойств аналитических функций.

Изучение характеристических свойств первообразных функций, составившее содержание третьей и четвертой глав, привело к выделению интеграла (в смысле Римана, Лебега и Данжуа) с переменным верхним пределом из множества первообразных данной функции.

Класс аналитических выражений, изучаемых Лузиным в развитие общей постановки задачи, — есть класс тригономет-



Н. Н. Лузин
1883—1952

рических рядов, прежде всего рядов Фурье. Их свойствам посвящена пятая глава диссертации. Еще в 1912 г. Лузин опубликовал пример тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad (A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0),$$

доказав, что указанные условия не обеспечивают сходимости тригонометрического ряда почти всюду и который почти всюду расходится. Воспроизведя его здесь, он вывел в дальнейшем необходимые и достаточные условия для сходимости почти всюду ряда Фурье для функции с интегрируемым квадратом (т. е. такой, что существует интеграл Лебега от ее квадрата на отрезке от 0 до 2π). Введенный в связи с этим особый интеграл

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi} \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{\alpha} \cos nx \, d\alpha$$

(где функция $g(x)$ — с интегрируемым квадратом) стал сильным средством исследования. С его помощью Лузин, в частности, открыл свойство почти симметричности измеримых функций.

Шестая глава посвящена определению условий представимости функций тригонометрическими рядами. Здесь исследованы различные методы суммирования тригонометрических рядов, неоднозначность (и даже бесконечнозначность) изображения функции посредством тригонометрических рядов. Выделение единственного способа разложения функции в тригонометрический ряд Лузин связал с обобщением понятия интеграла. Он считал, что неопределенным интегралом от $f(x)$ следует назвать функцию $\Phi(x)$, являющуюся суммой ряда, который получится при интегрировании ряда, изображающего $f(x)$.

Богатство идей, содержащихся в диссертации Лузина, поразительно. Мы смогли дать здесь о нем лишь первоначальное представление. Все основные понятия анализа: функция (в том числе, измеримая), производная, интеграл и др. — подверглись глубокому изучению, с точки зрения меры соответствующих множеств. Метрическая теория функций в России и в СССР имеет в лице Лузина своего основателя.

В 1915 г. Лузин и его ученики, в первую очередь П. С. Александров и М. Я. Суслин, начали заниматься дескриптивной

теорией функций — тем ее направлением, в котором исследуются представления широких классов функций при помощи предельного перехода, отправляясь от непрерывных функций.

На историческом рубеже, когда Россия стояла перед Великой Октябрьской социалистической революцией, Московская школа теории функций представляла объединение немногочисленных, но необычайно активно и плодотворно работающих ученых, в большинстве молодых (А. Я. Хинчин, В. В. Голубев, Д. Е. Меньшов, П. С. Александров, М. Я. Суслин, П. С. Урысон и др.). Они и их младшие товарищи и ученики обеспечили в дальнейшем внедрение идей теории функций в топологию, теорию чисел, теорию вероятностей, качественную теорию дифференциальных уравнений, теорию аналитических функций и в другие области математики.

Три научные школы: механики, дифференциальной геометрии и теории функций — вписали наиболее яркие страницы в историю московской математики в период 1860—1917 гг. Однако изучение показывает, что они не исчерпывают всех сторон деятельности математиков Москвы, объединенных в большинстве в научное общество. Более того, многие значительные стороны деятельности Московского математического общества этого периода, оказавшие определенное фактическое влияние на развитие математики, еще слабо изучены. Можно надеяться, что приближающееся столетие Московского математического общества (1864) вызовет новые исследования, полнее раскрывающие деятельность, роль и значение математиков Москвы.

Подведем итог. К началу XX в. Россия имела уже некоторое количество ученых-математиков. Они сосредоточивались в Академии наук и в немногочисленных высших учебных заведениях. В Москве и Петербурге они образовали научные объединения. Сильные коллективы ученых-математиков работали и крепили в ряде городов России. Среди них были выдающиеся представители, прославившие отечественную науку своими достижениями. Однако и эта отрасль отечественной науки (мы имеем в виду математику) носила на себе отпечаток гнетущего влияния отживающего общественно-экономического строя царской России.

Деятельность замечательных ученых-математиков оставалась изолированной. Математические отделения университетов были весьма немногочисленными; математиков-ученых и преподавателей были буквально единицы. Доступ в математику, как и во все другие науки, народным массам был за-

крыт. Гармонического развития всего фронта математической науки, сколько-нибудь широких связей ее с народным хозяйством не было. В среде математиков было много лиц с реакционными воззрениями.

После Великой Октябрьской социалистической революции, когда народ под руководством Коммунистической партии сломал в жестоких боях и труде отжившее социальное и экономическое устройство и приступил к строительству социализма, наступила пора нового развития математики. Более чем 40-летний период развития советской математики, период замечательных достижений, выдвинувших ее в первые ряды мировой науки, находит свое отражение в коллективных трудах: «Математика в СССР за 15 лет» (1933), «Математика в СССР за 30 лет» (1948) и «Математика в СССР за 40 лет» (1959), а также в многочисленных книгах и статьях.

Советские математики представляют ныне многочисленный отряд интеллигенции. Вместе со всем советским народом они трудятся над построением коммунистического общества в нашей стране, борются за мир во всем мире, за лучшее будущее всего человечества. Изучение и обобщение опыта их практической и теоретической деятельности представляет важную (если не самую важную) задачу научных исследований по истории математики.

БИБЛИОГРАФИЯ

I. Сочинения классиков марксизма-ленинизма

- Маркс К. Математические рукописи. В сб.: «Марксизм и естествознание» Госполитиздат, М., 1933, стр. 5—16.
- Энгельс Ф. Диалектика природы. Соч., изд. 2, т. 20. Госполитиздат, М., 1961.
- Энгельс Ф. Анти-Дюринг. Соч., изд. 2, т. 20. Госполитиздат, М., 1961.
- Ленин В. И. Философские тетради. Соч., т. 38. Госполитиздат, М., 1954.
- Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. Соч., т. 14 (см. в особенности гл. 8).

II. Общие сочинения по истории математики

- Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Физматгиз, М., 1960.
- Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. 1. ОНТИ, М., 1937.
- Колмогоров А. Н. Математика. БСЭ, изд. 2, т. 26. М., 1954, стр. 464—483.
- «Математика в СССР за пятнадцать лет». ГТТИ, М., 1933.
- «Математика в СССР за тридцать лет». ГТТИ, М., 1948.
- «Математика в СССР за сорок лет, 1917—1957», тт. 1—2. Физматгиз, М., 1959.
- Рыбников К. А. История математики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1960.
- Стройк Д. Короткая История математики. Изд-во «Рад. школа», Київ, 1960.
- Ежегодные сборники:
- «Историко-математические исследования», вып. I—XIV (выходят с 1948 г.).
- «Труды Института истории естествознания и техники» (выходят с 1954 г.).
- «Вопросы истории естествознания и техники» (выходят с 1956 г.).

III. Издания первоисточников

- Больяи Я. Аппендикс. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную... Гостехиздат, М., 1950.
- Больцано Б. Парадоксы бесконечного. Одесса, 1914.
- Галуа Э. Соч., ОНТИ, М.—Л., 1936.
- Дедекиннд Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1914.
- Дирихле Лежен Р. Лекции по теории чисел. ГТТИ, М.—Л., 1936.
- Карно Л. Размышления о метафизике бесконечно малых. ГТТИ, М.—Л., 1930.

- Ковалевская С. В. Научные работы. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948.
- Коши О. Алгебраический анализ. М., 1864.
- Коши О. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. СПб, 1831.
- Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908.
- Лобачевский Н. И. Собр. соч., тт. 1—5. Гостехиздат, М., 1946—1951.
- Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1951.
- Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. ГТТИ, М., 1953.
- Ляпунов А. М. Избр. тр. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948.
- Марков А. А. Избр. тр. Изд-во АН СССР, М., 1951.
- Монж Г. Приложения анализа к геометрии. ГТТИ, М., 1936.
- Монж Г. Начертательная геометрия. Гостехиздат, Л., 1947.
- «Об основаниях геометрии». Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. ГТТИ, М., 1956.
- Остроградский М. В. Полн. собр. тр., тт. 1—3. Изд-во АН УССР, Киев, 1959—1961.
- Остроградский М. В. Избр. тр. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948.
- Петерсон К. М. Об изгибании поверхностей. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. V. Гостехиздат, М., 1952, стр. 87—112.
- Риман Б. Соч. ГТТИ, М., 1948.
- Чебышев П. Л. Полн. собр. соч., тт. 1—5. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1944—1951.
- Чебышев П. Л. Избр. тр. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1955.
- Эйлер Л. Универсальная арифметика, тт. 1—2. СПб., 1768—1769.
- Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами либо максимума, либо минимума. ГТТИ, М. — Л., 1934.
- Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. ГТТИ, М., 1949.
- Эйлер Л. Интегральное исчисление, тт. 1—3. ГТТИ, М., 1956—1958.
- Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных, тт. 1—2. Физматгиз, М., 1961.

IV. Литература по истории смежных наук

- Берри А. Краткая история астрономии. Гостехиздат, М., 1946.
- Воронцов-Вельяминов Б. А. Очерки истории астрономии в России. Гостехиздат, М., 1956.
- «Вариационные принципы механики». Сб. ст. под ред. Л. С. Полака. Физматгиз, М., 1959.
- Григорьян А. Т. Очерки истории механики в России. Изд-во АН СССР, М., 1961.
- Моисеев Н. Д. Очерки по истории механики. Изд-во МГУ, 1961.
- Тюлина И. А., Ракчеев Е. Н. История механики. Изд-во МГУ, 1962.
- Кудрявцев П. С. История физики, тт. 1—2. Гостехиздат, М., 1956.
- Спасский Б. И. История физики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1956.

V. Дополнительная литература к отдельным главам

Глава 1

- Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. В сб., «Историко-математические исследования», вып. VII. Гостехиздат, М., 1954, стр. 453—512.

- Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. Гостехиздат, М., 1946.
- Молодший В. Н. Очерки по вопросам обоснования математики. Учпедгиз, М., 1958.

Глава 2 и 3

- Маркушевич А. И. Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера. В сб.: «Леонард Эйлер». Изд-во АН СССР, М., 1958, стр. 98—132.
- Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера. Гостехиздат, М., 1957.
- Симонов Н. И. О научном наследии Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. VII. Гостехиздат, М., 1954, стр. 513—597.
- Симонов Н. И. О первых исследованиях Ж. Даламбера и Л. Эйлера по теории линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. IX. Гостехиздат, М., 1956, стр. 789—803.
- Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. X. Гостехиздат, М., 1957, стр. 327—362.
- Франкль Ф. И. Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. VII. Гостехиздат, М., 1954, стр. 596—624.
- Юшкевич А. П. Исторический очерк. В кн.: Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. ГТТИ, М., 1952, стр. 428—458.

Глава 4

- Дорофеева А. В. Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. XIV. Физматгиз, М., 1961, стр. 101—181.
- Рыбников К. А. Первые этапы вариационного исчисления. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. II. Гостехиздат, М., 1949, стр. 355—498.
- Сб. ст. к 200-летию со дня рождения Ж.-Л. Лагранжа. ГТТИ, М., 1937.

Глава 5

- Делоне Б. Н. Эйлер как геометр. В сб.: «Леонард Эйлер». Изд-во АН СССР, М., 1958, стр. 133—183.
- Монж Г. Сборник статей. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1947.
- Стройк Д. Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия. ГТТИ, М. — Л., 1941.

Главы 6 и 7

- Башмакова И. Г. О доказательстве основной теории алгебры. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. X. Гостехиздат, М., 1957, стр. 257—304.
- Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк. М., 1922.

- Гельфонд А. О. Роль работ Эйлера по теории чисел. В сб.: «Леонард Эйлер». Изд-во АН СССР, М., 1958, стр. 80—97.
- Гельфонд А. О. Очерк истории современного состояния трансцендентных чисел. В сб.: «Марксизм и естествознание», вып. I (5). М., 1930, стр. 33—55.
- Гнеденко Б. В. О работах Леонарда Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдений, демографии и страхованию. В сб.: «Леонард Эйлер». Изд-во АН СССР, М., 1958, стр. 184—209.
- Гнеденко Б. В. О работах Гаусса по теории вероятностей. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956, стр. 184—209.
- Делоне Б. Н. Работы Гаусса по теории чисел. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956, стр. 11—112.
- Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. Учпедгиз, М., 1953.

Главы 8 и 9

- Антропова В. И. О работах Фурье, Остроградского и Пуассона по теплопроводности в жидкостях. В сб.: «Вопросы истории естествозн. и техн.», вып. III. Изд-во АН СССР, М., 1957, стр. 49—61.
- Кольман Э. Бернард Больцано. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1955.
- Маркушевич А. И. Работы Гаусса по математическому анализу. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956, стр. 145—217.
- Штокало И. З. Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Введение. Изд-во АН УССР, Киев, 1961.
- Юшкевич А. П. Исторический очерк. В кн.: Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. ГТТИ, М., 1952, стр. 428—458.

Глава 10

- Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Изд. Рост. гос. университета, 1962.
- Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. ГТТИ, М.—Л., 1951.
- Тимченко И. Ю. Основания теории аналитических функций, ч. 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. Одесса, 1899.

Глава 11

- Делоне Б. Н. Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1953.
- Каган В. Ф. Лобачевский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944.
- Норден А. П. Геометрические работы Гаусса. В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956, стр. 113—144.
- Рашевский П. К. «Основания геометрии» Гильберта и их место в историческом развитии вопроса. В кн.: Гильберт Д. Основания геометрии. ГТТИ, М.—Л., 1948, стр. 5—52.
- Розенфельд Б. А. Интерпретация геометрии Лобачевского. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. IX. Гостехиздат, М., 1956, стр. 169—208.
- Яновская С. А. Передовые идеи Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике. Изд-во АН СССР, М., 1950.

- Галченкова Р. И. Математика в Ленинградском (Петербургском) университете в XIX веке. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. XIV. Физматгиз, М., 1961, стр. 355—392.
- Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
- Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
- Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.
- Очерки по истории физико-математических наук в Казанском университете. «Уч. зап. Казанск. ун-та», 1960, вып. 20, кн. 7.
- Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры, т. 1, кн. 1. «Уч. зап. МГУ», 1947, вып. 91.
- Сб. «Научное наследие П. Л. Чебышева», вып. 1. Изд-во АН СССР, М., 1945.
- Ст. Александрова П. С. и других авторов о развитии математики и механики в Московском университете. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. 1, 1948; вып. VIII, 1955. Гостехиздат, М.
- Юшкевич А. П. Математика. В кн.: «История естествознания в России», т. 1, чч. 1—2, 1957; т. 2. 1960. Изд-во АН СССР, М.
-

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ¹

- Абель Н. Г. (Abel N.-H., 1802—1829) I: 120; II: 54, 61, 129, 149, 157, 162, 166—169, 177, 185, 186, 244, 245, 283
- Абельсон И. Б. I: 189
- Адамар А. Ж. (Hadamard J., род. 1865 г.) II: 145, 186, 256, 289.
- Александров А. Д. (род. 1912 г.) I: 15; II: 277
- Александров П. С. (род. 1896 г.) I: 4, 15; II: 4, 310, 316, 317, 323
- Аль-Баки см. Баки
- Аль-Бируни см. Бируни
- Аль-Каши см. Каши
- Аль-Кархи см. Кархи
- Аль-Хорезми см. Хорезми
- Ампер А.-М. (Ampère A.-M., 1775—1836) I: 116, 191, 202, 281
- Андерсон А. (Anderson A.) I: 157
- Андронов А. А. (1901—1952) II: 223
- Антропова В. И. (род. 1924 г.) II: 322
- Аполлоний (ок. 260—170 гг. до н. э.) I: 40, 63—65, 67, 70, 76, 77, 94, 98, 106, 137
- Аппель П. (Appel P., 1885—1930) II: 116
- Араго Д. (Arago D.-F., 1786—1853) II: 202
- Арган Ж. II: 127, 235, 236,
- Ариабхата (конец V в. до н. э.) I: 91, 92
- Аристарх (Самосский) (476 г. до н. э. — год смерти неизв.) I: 69, 77
- Аристотель (384—322 гг. до н. э.) I: 39
- Арнольд И. В. (1900—1948) II: 196
- Архимед (287—212 гг. до н. э.) I: 38, 40, 42, 48—63, 68—70, 76—78, 97, 98, 106, 111, 142, 152—155, 157, 160, 162, 163, 187
- Архит (ок. 440—360 гг. до н. э.) I: 28, 38
- Баки (умер ок. 1100 г.) I, 101
- Барн Н. К. (1901—1961) II: 35
- Барроу И. (Barrow I., 1630—1677) I: 59, 153, 169, 170, 180; II: 50
- Баше де Мезириак Г. (Bachet de Méziriac C. G., 1587—1638) I: 75.
- Башмакова И. Г. (род. 1921 г.) I: 4, 188; II: 4, 133, 164, 320, 321
- Безу Э. (Bezout E., 1730—1783) II: 121
- Бейес Т. (Bayes Th., ум. 1763 г.) II: 153
- Бельтрами Э. (Beltrami E.,) II: 268—270.
- Березкина Э. И. (род. 1931 г.) I: 80, 85, 188
- Беркли Дж. (Berkeley J., 1684—1753) II: 38
- Бернсайд У. (Burnside W., 1852—1927) II: 175

¹ Римскими цифрами I, II обозначены части книги.

- Бернулли Д. (Bernoulli D., 1700—1782) I: 54; II: 14—16, 18, 32, 54, 55, 65, 89, 152, 153, 203
- Бернулли И. (Bernoulli Jo., 1667—1748) I: 187; II: 9, 12, 16, 23, 27, 57, 66, 81, 87, 130, 228, 230
- Бернулли Н. (Bernoulli N., 1687—1759) II: 15, 16, 55, 64, 65
- Бернулли Я. (Bernoulli Ja., 1654—1705) I: 129, 186; II: 9, 10, 15, 16, 65, 81, 82, 152, 153
- Бернштейн С. Н. (род. 1880 г.) II: 294
- Берри А. I: 188; II: 320
- Бертран Ж. (Bertrand J., 1822—1900) II: 185, 257
- Бессель Ф. (Bessel F. W., 1774—1862) II: 20, 61, 75, 216
- Бетти Э. (Betti E., 1823—1892) II: 172
- Био Ж.-Б. (Biot J.-B., 1774—1862) II: 202
- Биркгоф Г.-Д. (Birkhoff G. D., 1884—1944) II: 225
- Бируни (972—1048) I: 103
- Боголюбов Н. Н. (род. 1909 г.) II: 95
- Больцано Б. (Bolzano B., 1781—1848) II 35, 40, 187, 190, 193—195, 319, 322
- Больцман Л. II: 212
- Больяи Я. (Bolyai J., 1802—1860) II: 157, 262, 319
- Бомбелли Р. (Bombelli R., 2-я пол. XVI в.) I: 120—122; II: 228
- де Бон см. Дебон
- Бонне П.-О. (Bonnet P.-O., 1819—1892) II: 185
- Борель Э. (Borel E., 1871—1956) II: 200, 256, 312
- Браге Тихо (Barhe T., 1546—1601) I: 142
- Брахмагупта (ок. 598—660) I: 91, 92
- Брашман Н. Д. (1796—1866) II: 304, 306
- Бредихин Ф. А. (1831—1904) II: 303
- Брейш II: 289
- Брекенридж У. (Braikenridge W., ок. 1745 г.) II: 99
- Бржечка В. Ф. (1891—1954) II: 193
- Бригг Г. (Briggs D., 1561—1630) I: 145—147
- Брио II: 245
- Бройль Л. де (de Broglie L., род. 1892 г.) II: 177
- Бугаев Н. В. (1837—1903) II: 185, 301, 306
- Буке II: 245
- Буняковский В. Я. (1804—1889) II: 202, 280, 284—286, 288, 303
- Бурбаки Н. (Bourbaki N.) II: 11
- Бхаскара А. (род. 1114 г.) I: 91—93
- Бэкон Р. (Bacon R., 1214—1294) I: 111
- Бэр Р.-Л. (Baire R.-L., 1874—1932) II: 200, 256, 312
- Бюе (Buée) II: 235, 236
- Бюрги И. (Bürgi J. J., 1552—1632) I: 141—144
- Бюшгенс С. С. (род. 1882 г.) II: 310
- Валле-Пуссен де ла см. Ла Валле-Пуссен
- Валлис Дж. (Wallis J., 1616—1703) I: 75, 153, 163, 180; II: 50, 139, 142, 228
- Ван Гейрат см. Гейрат
- Ван Данцинг см. Данцинг
- Ван Роумен см. Роумен
- Ван Сяо-Тун (VII в.) I: 85
- Ван Фу-Чун I: 90
- Ванцель П.-Л. (Wantzel P.-L., 1814—1848) I: 32, 34
- Ван Дер Варден Б.-Л. (van der Waerden B.-L., род. 1903) I: 23, 188
- Варинг Э. (Waring E., 1734—1798) II: 129, 135, 148
- Вариньон П. (Varignon P., 1654—1722) II: 52
- Васильев А. В. (1853—1929) II: 321
- Вебер Г. (Weber H., 1842—1913) II: 172, 202, 252
- Вейерштрасс К. (Weierstrass K., 1815—1897) II: 36, 42, 90, 93, 190, 193, 197, 245, 249, 252—256, 300
- Вейль Г. (Weyl H., 1885—1955) II: 95, 177, 249
- Вей ши I: 81
- Вепке Ф. (Woepcke F., 1820—1860) I: 102
- Вессель К. (Wessel, 1745—1818) II: 127, 235, 236

- Вьет Ф. (Viète F., 1540—1603) I: 99, 122—126, 131, 141, 142, 167
Вилейтнер Г. (Wieleithner H., 1874—1931) I: 188; II: 319
Виноградов И. М. (род. 1891 г.) I: 76, 90; II: 148, 290
Виртингер В. II: 252
Висковатов В. И. (1779—1812) II: 40
Виттик I: 142
Влакк А. I: 89, 147
Вольфскель II: 139
Вороной Г. Ф. (1868—1908) II: 290, 297
Воронцов-Вельямнов Б. А. (род. 1904 г.) II: 320
Вронский Г. (Wronski Hoene J., 1778—1853 г.) II: 284
Выгодский М. Я. (род. 1898 г.) I: 189

Галилей Г. (Galilei G., 1564—1642) I: 127, 153, 165, 170; II: 28, 221, 222
Галлей Э. (Halley E., 1656—1742) I: 64, 67; II: 124, 130
Галуа Э. (Galois E., 1811—1832) I: 9, 35, 120; II: 123, 133—135, 138, 157, 162, 163, 168—170, 172, 176—178, 319
Галченкова Р. И. II: 323
Гамильтон У.-Р. (Hamilton W.-R., 1805—1865) II: 178, 202, 214, 215
Гарриот Т. (Harriot Th., 1560—1621) I: 123, 124
Гаусс К.-Ф. (Gauss K.-F., 1777—1855) I: 8, 75, 121, 135; II: 14, 20, 61, 92, 116, 120, 127, 132, 142, 143, 149, 150, 153, 157, 162, 165, 177, 202, 204, 205, 210, 217, 235—237, 241, 246, 248, 259, 262, 267, 322
Гейберг Л. (Heiberg J. L.) I: 187, 188
Гейне Г.-Э. (Heine H.-E., 1821—1881) II: 196
Гейрат Г. ван (van Heiraet H., род. 1633 г.) I: 138
Гельмгольц Г. (Helmholz H., 1821—1894) II: 212, 246, 276, 300
Гельфонд А. О. (род. 1906 г.) I: 75; II: 149, 150, 322
Гемин (Родосский) (ок. 150 г. до н. э.) I: 76
Герберт Ф. (Herbart J. F., 1776—1841) I: 109
Герман Я. (1678—1733) II: 15
Герон (Александрийский) (ок. I в. н. э.) I: 38, 73
Гильберт Д. (Hilbert D., 1862—1943) I: 42; II: 90, 94, 143, 148—150, 176, 249, 252, 260, 270, 276, 322
Гинденбург К.-Ф. (Hindenburg K.-F., 1741—1808) II: 154
Гипатия (370—415) I: 71, 76
Гиппий (из Элиды) I: 33
Гиппократ (Хиосский) (2-я пол. V в.) I: 27, 31, 32, 34, 35, 40
Гиршвальд Л. Я. (род. 1894 г.) I: 189
Гливленко В. И. (1896—1940) II: 48
Гнеденко Б. В. (род. 1912 г.) I: 15, 189; II: 4, 321—323
Головин М. Е. (1756—1790) II: 18
Голубев В. В. (1884—1954) I: 15; II: 310, 317
Гольдбах Х. (Goldbach Ch., 1690—1764) II: 65, 140, 148
Гончаров В. Л. (1896—1955) II: 252
Горнер В.-Г. (Horner W.-G., род. 1819 г.) I: 87, 100; II: 138
Граве Д. А. (1863—1939) II: 297
Грассман Г. (Grassmann G., 1809—1877) II: 178
Грегори Дж. (Gregory J., 1638—1675) I: 169
Григорьян А. Т. (род. 1910 г.) II: 320
Грин Дж. (Green J., 1793—1841) II: 202, 204, 207, 248
Гуа Ж.-П. дю (de Gua de Malves J.-P., 1712—1785) II: 124
Гудде И. (Hudde J., 1628—1704) I: 166
Гурса II: 242, 257
Гурьев С. Е. (1766—1813) II: 40, 181
Гэн Чоу-Чан (I в. до н. э.) I: 80
Гэрриот Т. см. Гарриот
Гюа де Мальв де см. дю Гуа
Гюльден П. (Guldin P., 1577—1643) I: 77.
Гюйгенс Х. (Huygens Ch., 1629—1695) I: 129, 180, 186, 187; II: 28
Гюнтер Э. (Gunter E., 1581—1626) I: 147

- Давидов А. Ю. (1823—1885) II: 303, 304, 306, 307
- Да Винчи Л. см. Леонардо да Винчи
- Даламбер Ж.-Л. (D'Alembert J.-L., 1717—1783) II: 12, 14, 25, 27, 30, 31, 38, 39, 45, 53, 54, 61, 65, 67, 68, 72, 73, 121, 127, 132, 163, 179, 181, 185, 216, 230, 231, 233, 239, 240, 246, 250, 321
- Данжуа А. (Denjoy A., род. 1884 г.) II: 35, 314
- ван Данциг II: 176
- Дарбу Г. (Darboux, 1842—1917) I: 56; II: 104, 193, 216, 258, 310
- Датта Б. (Datta B.) I: 189
- Дебон Ф. (Debaune F., 1601—1652) I: 168, 169
- Де Бройль см. Бройль, де
- Дедекнд Р. (Dedekind R., 1831—1916) I: 38; II: 196, 252, 276, 319
- Дезарг Ж. (Desargues K., 1593—1662) I: 129, 185; II: 14, 117, 118, 259
- Декарт Р. (Descartes R., 1596—1650) I: 14, 32, 77, 125, 132, 130—138, 153, 164—166, 168, 169, 180, 187—189; II: 10, 22, 28, 96, 97, 99, 132, 139, 163, 319
- Делла Наве А. см. Наве А. делла
- Делоне Б. Н. (род. 1890 г.) I: 75; II: 145, 277, 321—323.
- Делль Ферро С. см. Ферро С. дель
- Демокрит (ок. 460—370 гг. до н. э.) I: 48
- Дешаль М. (Dechaies Cl. F. M., 1621—1678) II: 11
- Джарин II: 38
- Джоуль Дж. П. (Joule J. P., 1818—1889) II: 212
- Динострат (IV в. до н. э.) I: 59
- Диоклес (II в. до н. э.) I: 71
- Диофант (III в. н. э.) I: 23, 73—76, 142; II: 139, 140
- Дирак П. (Dirac P. A., род. 1902 г.) II: 177
- Дирихле П.-Г.-Л. (Dirichlet P.-G.-L., 1805—1859) II: 34, 35, 92—94, 144, 202, 206, 210, 213, 248, 288, 319
- Долбня И. П. (1853—1912) II: 297
- Дороднов А. В. (род. 1908 г.) I: 35
- Дорофеева А. В. II: 4, 321
- Дюбуа-Реймон П. (Du Bois Reymond P., 1818—1896) II: 35, 300
- Дюгамель II: 281
- Дюпен П.-Ш. (Dupin P.-Ch., 1781—1873) II: 109, 116
- Евдокс (ок. 408 — ок. 335 гг. до н. э.) I: 37, 38, 43, 49
- Евклид (IV—III вв. до н. э.) I: 27, 36, 37, 39—42, 44, 46, 47, 49, 52, 62, 70, 76—78, 89, 97, 101, 106, 110, 111, 160, 187; II: 96, 119—121, 139, 144, 260, 263—265, 267, 272, 273, 275, 276, 288
- Евтокий (VI в. н. э.) I: 77
- Егоров Д. Ф. (1869—1931) II: 310, 312
- Ермаков В. П. (1845—1922) II: 185, 216
- Ершов А. С. II: 306
- Жегалкин И. И. (1869—1947) II, 312
- Жерар (1114—1187) I: 110
- Жирар А. (Jirard A., 1595—1632) I: 124, 135; II: 132
- Жордан К. (Jordan K., 1838—1922) II: 36, 256
- Жуковский Н. Е. (1847—1921) II: 214, 256, 282, 301, 302, 307, 308, 310
- Зайдель А. (Seidel A., 1821—1896) II: 186
- Зенодор (III—II вв. до н. э.) I: 60, 73, 77
- Зенон (род. ок. 500 г. до н. э.) I: 48, 49
- Зенф К. Э. (Senf K. E., 1810—1849) II: 308
- Золотарев Е. И. (1847—1878) II: 290, 297
- Ишменецкий В. Г. (1832—1892) II: 298, 303
- Иордан Неморарий см. Неморарий И.
- Кавальери Б. (Cavalieri B., 1598—1647) I: 149, 153, 157—160, 163, 180, 181, 187, 189
- Каган В. Ф. (1869—1953) II: 322
- Кантор Г. (Cantor G., 1845—1918) II: 35, 196, 198, 200, 223, 276

- Каратеодори К. (Caratheodory C., 1873—1950) II: 200
- Кардано Дж. (Cardano G., 1501—1576) I: 118—122, 124; II: 10, 128
- Карно Л. (Carnot L., 1753—1823) II: 40, 116, 118, 320
- Карно С. (Carnot S., 1796—1832) II: 212
- Картан Э., (Cartan E., 1869—1951) II: 177, 259
- аль-Қархи I: 101
- аль-Қаши I: 99, 100, 104, 141, 187
- Кауфман см. Меркатор Н.
- Кебе II: 256
- Келдыш М. В. (род. 1911) II: 308
- Кенигсбергер О. (Koenigsberger O.) II: 300
- Кеплер И. (Kepler Jo., 1571—1630) I: 127, 129, 141, 143, 147, 149, 150, 153—157, 187, 189.
- Кестнер А.-Г. (Kästner A.-G., 1719—1800) II: 53, 190
- Кирик (Новгородец) I: 116
- Киркби Дж. II: 41
- Кирхгоф Г.-Р. (Kirchhoff G.-R., 1824—1887) II: 246, 248, 300
- Клаузен Т. (Klausen T., 1801—1885) I: 34, 35
- Клаузиус Р. (Clausius R., 1822—1888) II: 212
- Клебш (Clebsch, 1833—1872) II: 99
- Клейн Ф. (Klein F., 1849—1925) II: 119, 175, 176, 220, 221, 256, 259, 270—274
- Клеро А.-К. (Clairaut A.-K., 1713—1765) I: 139; II: 13, 54, 58, 67, 69, 99, 102, 106, 107, 203, 231
- Клюгель Г.-С. (KlÜgel G.-S., 1739—1812) II: 120, 121
- Ковалевская С. В. (1850—1891) II: 219, 220, 255, 298—303, 320
- Кодацци Д. (1824—1873) II: 310
- Колла Д. I: 119
- Колмогоров А. Н. (род. 1903 г.) I: 13, 15, 90, 186, 188, 189; II: 157, 294, 310, 319
- Кольман Э. Я. II: 301, 190, 322
- Кондорсе М., де (de Condorset M., 1743—1794) II: 52, 153
- Кондрашкова С. Ф. II: 4
- Коперник Н. (Kopernik N., 1473—1543) I: 122, 141, 153
- Коркин А. Н. (1837—1908) II: 216, 290, 297
- Котельников С. К. (1723—1806) II: 18
- Коши О.-Л. (Couchy O.-L., 1789—1857) I: 11, 185; II: 27, 40, 42, 44, 53, 127, 168, 173, 182, 183, 185—188, 190, 194, 195, 202, 218—220, 236, 237, 239—245, 252, 280, 281, 300, 320
- Крамер Г. (Cramer G., 1704—1752) I: 185; II: 124, 130
- Кронекер Л. (Kronecher L., 1823—1891) II: 165, 172, 198
- Крылов А. Н. (1863—1945) II: 57
- Крылов Н. М. (1879—1955) II: 95
- Кудрявцев П. С. II: 320
- Кулон Ш.-О. (Coulomb Ch.-O., 1736—1806) II: 202
- Куммер Э.-Э. (Kummer E.-E., 1810—1893) II: 143, 185, 198
- Курант Р. (Courant R., род. 1888 г.) II: 95, 249
- Курно А.-А. (Cournot A. A., 1801—1877) II: 195
- Кэли А. (Cayley A., 1821—1895) I: 9, 185; II: 119, 174, 259, 270, 271
- Ла Валле-Пуассен Ш. (de la Vallée Poussin Ch., 1866—1962) II: 145, 289
- Лаврентьев М. А. (род. 1900 г.) II: 95, 308
- Лажерр (Laguerre) II: 255, 295
- Лагир Ф. де (de Lahire F., 1640—1718) I: 138, 185
- Лагранж Ж.-Л. (Lagrange J.-L., 1736—1813) I: 9, 75, 95, 139; II: 12, 14, 28, 40—43, 45, 46, 53, 56, 58, 64, 69, 70—74, 78, 79, 88, 89, 104, 111, 124, 128, 131—135, 137, 148, 149, 163, 169, 173, 179, 186, 187, 203, 213, 214, 282, 302, 321
- Лакруа С.-Ф. (Lacroix S.-F., 1765—1843) I: 139; II: 34, 74, 104, 117, 121
- Ламберт И.-Г. (Lambert J.-H., 1728—1777) I: 34, 187; II: 14, 53, 111, 121, 148, 149, 262
- Ламе Г. (Lame G., 1795—1870) II: 61, 217, 281
- Ланден Дж. (Landen J., 1719—1790) II: 41
- Лаплас П.-С. (Laplace P.-S., 1749—1827) II: 12, 14, 19, 54, 58, 60, 70, 73, 76—78, 128, 152,

- 153, 202, 203, 206, 209, 222, 237, 238, 246, 248, 280, 281, 284, 290, 301
- Лебег А. (Lebesgue H., 1875—1941) II: 35, 95, 200, 256, 312—316
- Лебедев Д. Н. (1840—1880) II: 307
- Леви-Чивита Т. (Levi-Civita T., 1873—1941) II: 275
- Лежандр А.-М. (Legendre A.-M., 1752—1833) I: 34, 187; II: 14, 54, 55, 60, 89, 121, 142, 144, 149, 153, 217, 288, 289
- Лейбниц Г.-В. (Leibniz G.-W., 1646—1716) I: 14, 59, 61, 84, 128, 129, 133, 150, 152, 161, 170, 171, 175—187, 189; II: 8—10, 21, 23, 27, 37, 39, 43—45, 50, 55, 56, 58, 64, 65, 81, 82, 87, 139, 145, 153, 194, 228, 230
- Ленин В. И. (1870—1924) I: 7, 187; II: 308, 319
- Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci, 1452—1519) I: 187
- Леонардо Пизанский (Leonardo Pisano (Fibonacci), ок. 1170—после 1228) I: 111, 112, 141
- Летников А. В. (1837—1888) II: 304
- Ли С. (Lie S., 1842—1899) I: 9; II: 157, 175, 176, 220—222
- Линдеман Ф. (Lindeman F., 1852—1939) I: 34; II: 148
- Линник Ю. В. (род. 1915 г.) II: 150
- Липшиц Р. (Lipschitz, 1832—1903) II: 219
- Литлвуд Дж. (Littlewood J., род. 1885 г.) II: 143, 148
- Лиувилль Ж. (Liouville J., 1809—1882) II: 61, 116, 172, 216, 217, 245, 283
- Ли Чун-фэн (VII в.) I: 80
- Ли Янь I: 80
- Лобачевский Н. И. (1792—1856) I: 11, 34, 47; II: 34, 120, 122, 157, 185, 210, 213, 256, 259, 260, 262—272, 274—276, 284, 285, 320
- Ломоносов М. В. (1711—1765) II: 12, 16, 18, 278
- Лопиталь Г.-Ф. де (de L'Hospital G.-F., 1661—1704) I: 183, 187; II: 8, 130
- Лоран П.-А. (Laurent P.-A., 1813—1854) II: 245, 253
- Лоренц Г.-А. (Lorentz G.-A., 1853—1928) II: 222
- Лузин Н. Н. (1883—1950) I: 189; II: 35, 57, 310—316, 320
- Лука Пачиоли см. Пачиоли Л.
- Лурье С. Я. (род. 1890 г.) I: 189
- Лу Синь (I в. н. э.) I: 81
- Любимов Н. А. II: 303
- Люйлье С. (L'Huilier S., 1750—1840) II: 40, 181
- Люрот И. (Lürot J., 1844—1910) II: 173
- Люстерник Л. А. (род. 1899 г.) II: 95
- Лю Хуэй (III в.) I: 80, 81, 89
- Ляпунов А. М. (1857—1918) II: 207, 224, 225, 294, 297, 302, 320
- Магавира (IX в.) I: 91
- Мазер Ф. (Maseres F., 1731—1824) II: 127
- Майер Р. (Mayer R., 1814—1878) II: 212
- Майнард Г. (Mainardi, 1800—1879) II: 310
- Маклорен К. (Maclorin K., 1698—1746) II: 14, 38, 43, 44, 52, 56, 98, 125, 185, 188
- Максвелл Дж.-К. (Maxwell J.-K., 1831—1879) II: 202, 212
- Марков А. А. (1856—1922) II: 290, 294, 297
- Маркс К. (Marx K., 1818—1883) I: 15, 71, 130, 178, 184, 187; II: 37—40, 43—48, 319
- Маркушевич А. И. (род. 1908 г.) I: 15; II: 234, 321, 322
- Мебнус А.-Ф. (Möbius A.-F., 1790—1868) II: 104, 119, 259
- Менелай (I в. н. э.) I: 105
- Менье Ж.-Б. (Meusnier J.-B., 1754—1799) II: 13, 104, 111
- Меньшов Д. Е. (род. 1892 г.) I: 90; II: 32, 310, 317
- Меркатор Н. (Mercator N., 1620—1687) I: 147—149; II: 234
- Мерсенн М. (Mersenne M., 1588—1648) II: 28
- Мерэ Ш. (Meray Ch.) II: 196
- Мизес Р. (Mises R., 1883—1953) II: 294
- Миндинг Ф. Г. (1806—1885) II: 116, 216, 267, 268, 308
- Миттаг-Леффлер М.-Г. (Mittag-

Leffer M.-G., 1846—1927) II: 255
 Млодзеский Б. К. (1858—1923)
 II: 310, 312
 Монсеев Н. Д. (1902—1955)
 II: 320
 Молодший В. Н. (род. 1906 г.)
 II: 321, 322
 Монж Г. (Monge G., 1746—1818)
 II: 13, 14, 72, 73, 75, 103, 104,
 110, 118, 128, 217, 320, 321
 Мопертюи П.-Л. (Maurpertuis P.-L.
 M., 1698—1759) II: 99, 107, 214
 Муавр А. де (Moivre A. de,
 1667—1754) II: 13, 26, 152, 290
 Муаньо Ф. (Moigno F. N. M.,
 1804—1884) II: 219
 Муравьев Н. Н. (1768—1840)
 II: 304
 Мурайль Ж.-Р. (Mouraille J.-R.,
 1768) II: 124
 Мюллер Иоганн см. Регномонтан

 Наве А. делла (Nave A., della)
 I: 117
 Насирэддин ат-Туси см. ат-Ту-
 си Н.
 Нейгебауер О. (Neugebauer O.,
 род. 1899) I: 23, 24, 188
 Нейль В. (Neil W., 1637—1670)
 I: 138
 Нейман К.-Г. (Neumann K.-G.,
 1832—1925) II: 206, 207
 Нейман Ф. (von Neumann F.,
 1798—1895) II: 93, 202, 206, 249
 Неморарий И. (Nemorarius Jorda-
 nus, XIII в.) I: 112
 Непер Дж. (Neper J., 1550—1617)
 I: 144—147, 162
 Нетер М. (Noether M., 1844—
 1921) II: 252
 Николь Ф. (Nicole F., 1683—
 1758) II: 99
 Никомед (III—II вв. до н. э.)
 I: 71
 Норден А. П. (род. 1904 г.)
 II: 116, 322
 Ньютон И. (Newton I., 1642—
 1727) I: 14, 101, 127—129, 133,
 138, 139, 151, 152, 169—181, 184,
 185, 187, 189; II: 21, 22, 37—39,
 43—45, 50—52, 56, 81, 97, 98,
 100, 124—126, 130, 131, 134, 135,
 180, 181, 195, 203, 284

Однер В. Т. I: 150
 Озанам И. (Ozanam I., 1640—

1717) II: 11
 Ольденбург Г. (Oldenburg H.,
 1615—1677) I: 181
 Орезм Н. (Oresme N., 1323—
 1382) I: 112, 113, 142
 Орлов Л. Г. II: 4
 Орлов Ф. Е. II: 307
 Осиловский Т. Ф. (1765—1832)
 II: 280
 Остроградский М. В. (1801—1861)
 II: 91, 202, 205, 210, 214, 215,
 265, 280—286, 320, 322, 323

 Папп (2-я пол. III в. до н. э.)
 I: 76—78, 132—134
 Паран А. (Paren A., 1666—1716)
 I: 138
 Паскаль Б. (Pascal B., 1623—
 1662) I: 59, 88, 95, 149, 150, 153,
 160, 161, 180, 181, 185, 186;
 II: 10, 118, 139, 140, 259
 Пачиоли Л. (Pacioli L., ок. 1445—
 позднее 1509) II: 10
 Паш М. (Pasch M., 1843—1930)
 I: 42; II: 276
 Пеано Дж. (Peano G., 1858—
 1932) I: 42; II: 36, 219, 276
 Пелль И. (Pell I., 1610—1685)
 I: 95; II: 140
 Перрон II: 206
 Петерсон К. М. (1828—1881)
 II: 304, 308, 310, 320
 Петровский И. Г. (род. 1901 г.)
 II: 95
 Пиери (Pieri) I, 42; II: 276
 Пизанский Л. см. Леонардо Пи-
 занский
 Пикар Э. (Picard E., 1856—1941)
 II: 220, 255, 257
 Пимбертон II: 38
 Пифагор (ок. 580—500 гг. до н. э.)
 I: 26, 27, 30, 31, 42, 84, 89, 91,
 111; II: 263
 Платон (429—348 гг. до н. э.) I:
 27, 77
 Плюккер Ю. (Plücker, 1801—
 1868) II: 270
 Погребынский И. Б. (род. 1906 г.)
 I: 4; II: 4
 Помаленькая О. Т. II: 4
 Понселе Ж.-В. (Poncelet J.-V.,
 1788—1867) II: 14, 118, 259
 Понтрягин Л. С. (род. 1908 г.)
 II: 176
 Постников А. Г. (род. 1921 г.) II:
 290

Привалов И. И. (1891—1941) II: 310
 Прокл (410—485) I: 76, 77
 Пташицкий И. Л. (1854—1912) II: 297
 Птолемей К. (II в. н. э.) I: 73, 76, 105, 110
 Пуанкаре А. (Poincaré H., 1891—1941) II: 176, 198, 206, 219, 222—224, 255, 256, 272
 Пуансо Л. (Poinsot L., 1777—1859) II: 302
 Пуассон С.-Д. (Poisson, 1781—1840) II: 116, 194, 202, 203, 210, 215, 238, 280, 281, 322
 Пфафф И.-Ф. (Pfaff I.-F., 1765—1825) II: 73, 74, 115, 217, 218
 Пюизё В. (Puiseux V., 1820—1883) II: 245
 Раабе Ж.-Л., (Raabe J.-L., 1801—1859) II: 185
 Ракчеев Е. Н. II: 320
 Рахманов П. А. II: 40
 Рашевский П. К. (род. 1907 г.) II: 322
 Региомонтан (Regiomontanus, 1436—1476) I: 114, 117
 Ретикус (1514—1576) I: 141
 Риккати Д. (Riccati J., 1676—1754) II: 12, 65, 66, 216
 Риман Б. (Riemann B., 1826—1866) I: 54; II: 27, 35, 92—94, 145, 210, 212, 213, 245, 246, 248—252, 256, 274, 275, 314, 320
 Ринд (Rind) I: 19, 20
 Ритц В. II: 94
 Риччи-Курбастро Г. (Ricci-Gurbaastro G., 1853—1925) II: 275
 Роберваль Ж. (Roberwal J., 1602—1675) I: 153, 165
 Робинс Б. (Robins B., 1707—1751) II: 38
 Розенфельд Б. А. (род. 1917 г.) II: 272, 322
 Ролль М. (Rolle M., 1652—1719) I: 166; II: 131
 Романов Н. П. (род. 1907 г.) II: 290
 ван Роумен I: 99
 Румовский С. Я. (1734—1812) II: 18
 Руффини П. (Ruffini P., 1765—1822) I: 87, 100; II: 13, 137, 138, 166, 168, 173
 Рыбников К. А. (род. 1913 г.) I:

188, 189; II: 3, 97, 132, 139, 145, 260, 319, 321
 Рыхлик К. II: 190, 194
 Савар Ф. (Savart F., 1791—1841) II: 202
 Саккери Д. (Caccheri D., 1667—1733) II: 120, 121, 262
 Сакс (Saks) I: 23
 Сальмон Г. (Salmon G., 1819—1904) II: 99
 Самарский А. А. (род. 1919 г.) II: 209
 Сарватасидда I: 91
 Сафронов II: 18
 Сельберг II: 290
 Сен-Венан Барпе А.-Ж. де (Saint-Venant A. J. K. de, 1797—1886) II: 116
 Сен-Винсент I: 147
 Сен-Жермен II: 116
 Серре Ж.-А. (Serret J.-A., 1819—1885) II: 116, 172
 Силов (Sylov) II: 133
 Сильвестр Дж. Д. (Sulvester J.-J., 1814—1897) II: 99, 289
 Симонов Н. И. (род. 1910) I: 4; II: 4, 321
 Симпсон Т. (Simpson T., 1710—1761) II: 153
 Сингх А.-Н. (Singh A. N.) I: 189
 Скаутен Ф. (van Scooten F., 1615—1660) I: 135
 Слудский Ф. А. (1841—1897) II: 304, 306, 307
 Сомов И. И. (1815—1876) II: 245, 297, 303, 306
 Сонин И. Я. (1849—1915) II: 298
 Сорокина Л. А. (род. 1932 г.) II: 4
 Сохоцкий Ю. В. (1842—1929) II: 298
 Спасский Б. И. I: 188; II: 205, 320
 Спейдель Дж. I: 147
 Спинноза (Spinosa) I: 128
 Сретенский Л. Н. (род. 1902 г.) II: 310
 Стевин С. (Stevin S., 1548—1620) I: 99, 141, 142; II: 128
 Стеклов В. А. (1864—1926) II: 297
 Степанов В. В. (1889—1950) II: 310, 321, 322
 Стильтье Т.-И. (Stieltjes T.-J., 1856—1894) II: 256
 Стилинг Дж. (Stirling J. G.,

- 1692—1770) II: 14, 54, 98, 124, 130, 152
 Стокс Дж.-Г. (Stokes, 1819—1903) II: 186, 202
 Столетов А. Г. (1839—1896) II: 303
 Стройк Д. (Stroik D. J.) II: 319, 321
 Су Бо-цин I: 90
 Сун Цзы (III в.) I: 88
 Суслин М. Я. (1894—1919) II: 316, 317
- Тартаковский В. А. (род. 1901 г.) I: 28
 Тарталья Н. (Tartaglia N., ок. 1499—1557) I: 117—119; II: 10, 128, 129
 Тауринус II: 262
 Тейлор Б. (Taylor B., 1685—1731) II: 14, 28, 30, 43, 44, 51—53, 68, 69, 186, 188, 244, 256
 Теодор (Киренский) (V в. до н. э.) I: 28
 Теон (Александрийский) (IV в.) I: 76
 Тезтет (Афинский) (IV в. до н. э.) I: 28
 Тимченко И. Ю. (1862—1933) II: 322
 Тихо Браге см. Браге Тихо
 Тихонов А. Н. (род. 1906 г.) II: 209
 Томсон Кельвин У. (Thomson Kelvin W., 1824—1907) II: 92, 202, 212, 248
 Торелли II: 38
 Торричелли Э. (Torricelli E., 1608—1647) I: 153, 160, 165
 ат-Туси Насирэддин (1201—1274) I: 101, 105—107
 Тюлина И. А. II: 320
- Уатт Дж. (Watt J., 1736—1819) II: 295
 Улугбек М.-Т. (1411—1449) I: 104
 Урусов С. С. II: 304
 Урысон П. С. (1898—1924) II: 310, 317
- Фаддеев Д. К. (род. 1907 г.) I: 75
 Фальк II: 242
 Федоров Е. С. (1853—1919) I: 9; II: 174
 Феодосий (I в. до н. э.) I: 77
 Ферма П. (Fermat P. de, 1601—1665) I: 75, 125, 128, 136—138, 149, 153, 161, 162, 166, 167, 185, 186; II: 10, 50, 96, 97, 99, 126, 139—143
 Феррари Л. (Ferrari L., 1522—1565) I: 119; II: 128
 Ферро Сципион дель (Ferro Scipion del, 1465—1526) I: 117, 118
 Фибоначчи см. Леонардо Пизанский
 Фидий I: 52
 Фик II: 212
 Фиников С. П. (род. 1883 г.) I: 90; II: 310
 Фиоре I: 117
 Фихтенгольц Г. М. (род. 1888 г.) II: 35
 Фогель К. (Vogel K., род. 1888 г.) I: 24
 Фохт К. (Vogt K., 1817—1895) II: 222
 Франкль Ф. И. II: 321
 Фредгольм Э. И. (Fredholm E. I., 1866—1927) II: 206
 Френд В. (Frend W., 1757—1841) II: 127
 Френе Ж.-Ф. (Frenet J.-E., 1816—1900) II: 116
 Френель О. Ж. (Fresnel O. J., 1788—1827) II: 62
 Фреше Р. М. (Frechet R.-M., род. 1878 г.) II: 200
 Фукс (Fuchs, 1833—1902) II: 256
 Фурье Ж.-Б. (Fourier J.-B.-J., 1768—1830) I: 90; II: 32, 34, 35, 58, 116, 124, 202, 208—210, 212, 213, 246, 281, 316, 322
 Фусс Н. И. (1755—1825) II: 18
- Хайям О. (ок. 1040 — ок. 1123) I: 102, 106, 187
 Хандриков М. Ф. (1837—1915) II: 303
 Харди Г.-Г. (Hardy G.-H., 1877—1947) II: 148
 Хаусдорф Ф. (Hausdorff F., 1868—1942) II: 200
 Хинчин А. Я. (1894—1959) II: 310, 317
 ал-Хорезми (IX в.) I: 99, 101, 103
 Хуа Ло-Кэн I: 90, 188
- Цейлен Л. ван (van Ceulen L., 1540—1610) I: 141
 Цейтен Г.-Г. (Zeuthen H.-G.,

- 1839—1920) I: 35, 63, 133, 134, 188
 Цзю Чун-чжи (428—499) I: 81
 Цингер В. Я. (1836—1907) II: 303, 307
 Цинь Цзю-шао (XIII в.) I: 86, 89
- Чаплыгин С. А. (1869—1942) II: 256, 308
 Чеботарев Н. Г. (1894—1947) I: 35, 121; II: 131, 168, 173, 298
 Чебышев М. Л. (1821—1894) I: 8; II: 144, 150, 216, 224, 251, 283, 286, 288—290, 293—297, 301, 303, 306, 320, 323
 Чен Чзян-гун I: 90
 Черепнин Л. В. I: 116
 Чжан Хэн (78—139) I: 81
 Чжан Цань (II в. до н. э.) I: 80
 Чжан Цзю-цзян (VI в.) I: 82
 Чжень Луань (VI в.) I: 80
 Чжу Ши-цзе (ок. 1300 г.) I: 86, 87
 Чирнгаузен Э.-В. фон (Tschirhaus E. W., von., 1651—1708) II: 128, 135
- Шабат Б. В. (род. 1917 г.) II: 4
 Шаль М. (Chasles M., 1793—1880) II: 99, 118, 259
 Шапиро Г. М. (род. 1903 г.) II: 131
 Шарпи П. (Charpit P., умер ок. 1785 г.) II: 73, 74
 Шафаревич И. Р. (род. 1923 г.) II: 143, 173
 Шварц Г. А. (Schwarz G.-A., 1843—1921) II: 93, 206, 249, 256, 285
 Швейкарт Ф. К. (Schweikart F.-K., 1780—1857) I: 254
 Шевалье О. (Chevallier O.) I: 224
 Шенкс I: 141
 Шёнфлис А. II: 174
 Шень Ко (XI в.) I: 87
 Шереметьевский В. П. I: 188
 Шиккард В. I: 149, 150, II: 10.
 Шиллинг (Schilling) II: 266
 Шмидт О. Ю. (1891—1956) II: 298
 Шотт К. (Schott K., 1608—1666) II: 11
- Шредингер Э. (Schrödinger E.) II 177
 фон Штаудт Х. (von Staudt Ch., 1798—1867) II: 119, 259
 Штейнер Я. (Steiner Ja., 1796—1863) II: 99, 259
 Штейниц (Steinitz) II: 173
 Штифель М. (Stifel M., ок. 1486—1567) I: 100, 142
 Штокало И. З. (род. 1897 г.) I: 4; II: 4, 322
 Штуди II: 259
 Штурм Ж.-Ш. (Sturm J.-Ch. F., 1803—1855) II: 217
 Шуберт Ф. (1758—1825) II: 234
 Шумахер Г. (Schumacher G., 1780—1850) II: 18
 Шур И. (Schur J., 1875—1941) II: 289
 Шюке Н. (Chuquet N., XV в.) I: 84, 113
- Эйлер Л. (Euler L., 1707—1783) I: 75, 139, 149, 186; II: 12—28, 31, 32, 38, 39, 43, 45, 49—51, 53—63, 65—68, 70, 71—73, 75, 78, 79, 81—89, 91, 94, 99—103, 107—111, 125—130, 132—134, 139—149, 153, 179, 184, 187, 203, 212, 214, 216, 217, 230—235, 239, 240, 242, 246, 250, 278, 280, 283, 288, 302, 320—322
 Эйлер П. (Euler P.) II: 16, 31
 Энгельс Ф. (Engels F., 1820—1895) I: 5, 6, 15, 25, 70, 71, 117, 128, 130, 170, 187; II: 277, 319
 Эратосфен (Киренский) (ок. 276—194 гг. до н. э.) I: 32, 40, 53, 116, 187
 Эрмит Ш. (Hermite Ch., 1822—1901) II: 104, 148, 255, 256, 283, 295
 Эрстедт II: 202
- Юшкевич А. П. (род. 1906 г.) I: 4, 188, 189; II: 4, 320—322
- Якоби К.-Г.-Я. (Jacobi K. G. J., 1804—1851) II: 61, 74, 90, 214, 216, 218, 245
 Яновская С. А. (род. 1896 г.) I: 4, 188, II: 4, 322
 Ян Хуэй (XIII в.) I: 87

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
19	13 сверху	(1722)	(1772)
41	13 сверху	$y^{\frac{m}{n}}$	$y = x^{\frac{m}{n}}$
68	13 снизу	incremenforum-	incrementorum
77	7 снизу	(s — z)	П (s — z)
108	16 сверху, числитель дроби	$\vdash p^2 + q^2]^3_2$	$\vdash p^2 + q^2]^{3/2}$
194	10 сверху	отрезков, соединяющих точки:	отрезков, попарно соеди- няющих точки:
237	1 снизу	φx	$\varphi (x)$
240	1 снизу	$(x_0 + iy_0)$	$(x + iy_0)$
241	9 сверху	$\int_{x_0 + iy_0}^{X + iy}$	$\int_{x_0 + iy_0}^{X + iY}$
243	5 сверху	$\vdash a_2 x^2$	$\vdash a_2 \bar{x}^2$
249	15 снизу	на стр. 239	на стр. 250
266	17 сверху	δ от $2d$	σ от $2d$
281	1 снизу	См. стр. 201.	См. стр. 210.
300	15 сверху, зна- менатель дроби	$\partial x^\alpha \partial x^{\alpha_1} \dots$	$\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots$
317	19 снизу	(1864)	(1964)
324	левый столбец, 9 снизу	1885 — 1930)	1855 — 1930)
327	правый столбец, 10 снизу	Ишменецкий	Имшенецкий
331	правый столбец, 3 снизу	Стильтье	Стильтьес
	1 снизу	Стилинг	Стирлинг
332	левый столбец, 15 сверху	Тартальи	Тарталья

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Часть 1

ПЕРИОД СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XVIII в.

Глава I. Условия и особенности развития математики в XVIII в.	7
Глава II. Преобразование основ анализа бесконечно малых в XVIII в.	21
Глава III. Развитие аппарата математического анализа в XVIII в.	49
Глава IV. Создание вариационного исчисления	79
Глава V. Развитие геометрии в XVIII в.	96
Глава VI. Создание предпосылок современной алгебры. Формиро- вание теории чисел	123

Часть 2

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XIX в. И НАЧАЛО ПЕРИОДА СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Некоторые общие замечания о развитии математики в XIX в. .	157
Глава VII. Возникновение основных понятий современной алгебры	161
Глава VIII. Перестройка основ математического анализа в XIX в.	179
Глава IX. Развитие аппарата и приложений математического анали- за в XIX в.	201
Глава X. Создание теории функций комплексного переменного .	227
Глава XI. Преобразование геометрии в XIX в.	258
Глава XII. О развитии математики в России	278
Библиография	319
Именной указатель	324

Константин Алексеевич Рыбников

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ, ч. II

Редактор *Л. А. Сорокина*

Технич. редактор *Г. И. Георгиева*

Корректоры *Л. С. Гришаева, В. П. Кададинская*

Сдано в набор 21/XII-62 г.	Подписано к печати 1/VI-63 г.		
Л-31913	Формат $60 \times 90_{1/16}$	Печ. л. 21,0	Уч.-изд. л. 19,84
Изд. № 336	Заказ № 335	Тираж 12.500	Цена 80 коп.

Издательство Московского университета
Москва, Ленинские горы, Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы